أولا

الجــــبــر

حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب

يسمى (أ ، ب) زوجا مرتبا ، و يسمى أ المسقط الاول او المسقط السينى ، و يسمى ب المسقط الثانى او المسقط الصادى.

خلى بالك

- (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) لانه زوج مرتب و ليس مجموعه **مثل (٢ ، ٣) ≠ (٣ ، ٢)**
- (أ ، ب) ≠ { أ ، ب } ≠ [أ ، ب] لانها عناصر مجموعه و فتره
- **يسمح بتكرار العناصر فى الزوج المرتب مثل (أ ، أ) لكن فى المجموعات لا تكرر العناصر**
- س × ∅ = ∅ × س = ∅

تساوى زوجين مرتبين

اذا كان (أ ، ب) = (س ، ص) فان أ = س ، ب = ص

مثلا اذا كان (أ ، ب) = (٣ ، -٤) فان أ = ٣ ، ب = -٤

أمثله على تساوى زوجين مرتبين

أوجد قيمتى كل من س ، ص فى كل مما ياتى :-

١) - **(س – ٣ ، ١٦) = (٢ ، ص^{٢})**

الحل :- س- ٣ = ٢ س = ٥

ص^{٢} = ١٦ باخذ الجذر ص = ±٦

٢) - (٤^{س} ، ص^{٣}) = (٦٤ ، ٢٧)

الحل :- ٤^{س} = ٦٤ ٤^{س} = ٤^{٤} س = ٤

ص^{٣} = ٢٧ باخذ الجذر التكعيبى ص = ٣

٣) – **(٣٢ ، س + ص) = (ص^{٥} ، ٢)**

الحل :- ٣٢ = ص^{٥} ٢^{٥} = ص^{٥} ص = ٢

س+٢= ٢ و منها س= ٢-٢ = ٠ س = ٠ .

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

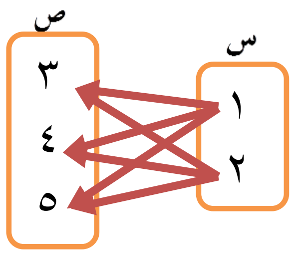
١ - **حاصل الضرب الديكارتى للمجموعه س فى المجموعه ص** ، و يرمز له بالرمز س × ص هو : مجموعة جميع الازواج المرتبة التى مسقطها الاول عنصر ينتمى الى س و مسقطها الثانى عنصر ينتمى الى ص اى ان س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

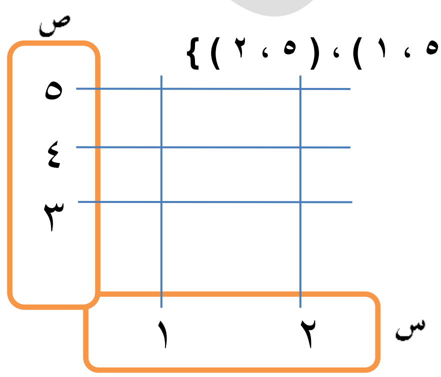
مثلا :- **اذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } اوجد س × ص ، ص × س**

س × ص= { ١ ، ٢ } × { ٣ ، ٤ ، ٥ } =
{ (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) }

ص × س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } × { ١ ، ٢ } =
{ (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

لتمثيل س × ص بمخطط سهمى او بيانى كالتالى





حاصل ضرب مجموعه فى نفسها :-

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعه س فى نفسها ، يرمز له بالرمز س × س او الرمز $س^٢$ و هو مجموعة جميع الازواج المرتبه التى كل من مسقطها الاول و الثانى عنصر من عناصر س

اى ان س × س = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س }

اذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } فان $س^٢$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } × { ٢ ، ٣ ، ٤ } =

{ (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

١ ٢

٣

عدد الازواج المرتبه فى حاصل الضرب ن (س × ص)

اذا رمزنا لعدد عناصر مجموعه ما بالرمز ن فانه اذا كان لدينا مجموعتان س = { ٣ ، ٤ } ، ص = { ٥ ، ٧ ، ٩ }

فان عدد عناصر المجموعه س = ن (س) = ٢ ، عدد عناصر المجموعه ص = ن (ص) = ٣

لايجاد ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٢ × ٣ = ٦

مثال :- اذا كانت ن (س × ص) = ١٥ ، ن (ص) = ٥ فاوجد قيمة ن (ص)

الحل ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) ∴ ١٥ = ن (س) × ٥ ∴ ن (س) = ١٥ ÷ ٥ = ٣

لاحظ ان : ن ($س^٢$) = [ن (س) $]^٢$ اذا كان ن (س) = ٥ فان ن ($س^٢$) = ٢٥

تمثيل حاصل الضرب الديكارتى للمجموعات غير المنتهيه ح × ح

الربع الاول : س + ، ص -

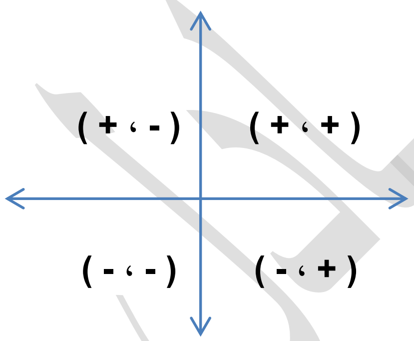
الربع الثانى : س - ، ص +

الربع الثالث : س - ، ص -

الربع الرابع : س + ، ص -

اذا وقعت النقطة على محور السينات فان ص = ٠

اذا وقعت النقطة على محور الصادات فان س = ٠



اكمل ما ياتى

النقطة .... تقع في الربع الثاني

[(٣ ، ٢) ، <u>(-٢ ، ٣)</u> ، (-٣ ، -٢) ، (٢ ، - ٣)]

إذا كانت: (س ، ٢) تقع على محور الصادات فإن س=......

[<u>٠</u> ، ١ ، ٢ ، ٣]

إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب =.....

[٢ ، ٥ ، <u>٧</u> ، ١٢]

إذا كانت النقطة (س – ٤، ٢– س): س ∈ ص تقع في الربع الثالث فإن س =.....

[٢ ، <u>٣</u> ، ٤ ، ٦]

تمارين على الدرس

اكمل ما ياتى

١) اذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ } فان ن (س × ص) = ... ، ص × س = ...

٢) اذا كان (س - ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فان $\sqrt{س + ٢ص}$ = ...

٣) اذا كان س = { ٧ } فان ن (س^2) = ... ، س^2 = ...

٤) اذا كان ن (س × ص) = ٢٠ ، ن (س^2) = ٢٥ فان ن (ص) = ...

٥) اذا كان س = { ٣ ، ٤ } فان : س × Ø = ... ، ن (س × Ø) = ...

٦) اذا كان (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨ } فان س = ...

٧) الزوج المرتب (س^2 ، ص^2) حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ يقع فى الربع ......

اختر ما ياتى

١) اذا كان س = { ٣ } ، ص = { ٥ } فان ن (س × ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١٥

٢) اذا كان س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ } فان (٣ ، ٤) ∈ ......

(أ) س × ص (ب) ص × س (جـ) س^2 (د) ص^2

٣) اذا كان ن (س^2) = ٤ ، ن (س × ص) = ٨ فان : ن (ص^2) = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

٤) اذا كان (س – ص) × ص = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) } ، ن { س × ص } = ٦ فان س = ...

(أ) { ١ } (ب) { ١ ، ٢ } (جـ) { ١ ، ٣ ، ٦ } (د) { ١ ، ٢ ، ٣ }

٥) اذا كان (|س| ، ٤) = (٣ ، ص^2) و النقطة (س ، ص) تقع فى الربع الثانى فان س + ص = ...

(صفر ، ١ ، - ١ ، - ٧)

٦) اذا كانت النقطه (أ ، ب) نفع فى الربع الرابع فان أ ب ...... صفر (= ، < ، ≤ ، >)

اذا كان س × ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) } **أوجد**

١ - س ، ص **٢ – ص × س** **٣ - ص^2**

اذا كان س = { ١ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } **اوجد**

(س – ص) × (س ∪ ص) ، (س × ص) ∩ (ص × س)

قيل ليوسف فى السجن

" انا نراك من المحسنين "

و قيل ليوسف و هو على خزائن الارض

" انا نراك من المحسنين "

المعدن الطيب لاتغيره الاحوال و المناصب

العلاقات و الدوال

العلاقة من مجموعه الى مجموعه اخرى

العلاقه من مجموعه س الى مجموعه ص هو ارتباط يربط بعض او كل عناصر س ببعض او كل عناصر ص
اذا كانت ع علاقه من س الى ص فان بيان ع هو مجموعة الازواج المرتبه التى مسقطها الاول عنصر من عناصر س و مسقطها الثانى عنصر من عناصر ص و تصبح ع ⊂ س × ص

مثال : اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } و كانت ع علاقة من س الى ص حيث " أ ع ب " تعنى ان : أ + ب = ٦ ∀ أ ∋ س ، ب ∋ ص اكتب بيان ع و مثله بمخطط سهمى و اخر بيانى

الحل : ع = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) } (مثل المخطط السهمى و البيانى بنفسك)

العلاقة من مجموعه الى نفسها

اذا كانت ع علاقه من المجموعه س الى س فاننا نقول ع علاقه على س و تكون ع ⊂ س^{٢}

مثال :- اذا كانت س = { ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ } و كانت ع علاقه على س حيث ان " أ ع ب " تعنى ان " أ معكوس ضربى ل ب " ∀ أ ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع و مثله بمخطط سهمى

الحل :- ع = { (٣ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ١) ، ($\frac{١}{٢}$ ، ٢) ، ($\frac{١}{٣}$ ، ٣) }

ثانيا :- الدالة

يقال لعلاقة من س الى ص انها داله اذا تحققت احدى الحالات الاتيه

١ – كل عنصر من عناصر س يظهر مرة واحدة فقط كمسقط اول فى احد الاواج المرتبه التى تنتمى الى بيان العلاقه
٢ – كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط الى احد عناصر ص و ذلك فى المخطط السهمى الممثل للعلاقه
٣ – كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة و ذلك فى المخطط البيانى للعلاقة

مع ملاحظة ان : عناصر س تسمى المجال ، عناصر ص تسمى المجال المقابل ، المدى صور عناصر س فى المجموعة ص و لذلك المدى ⊂ ص

مثال :- اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } و كانت ع علاقه من س الى ص حيث أ ع ب تعنى " أ = $\frac{١}{٣}$ ب " لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى ، هل ع دالة ؟ اذا كانت دالة أوجد مداها .

الحل :- ع = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩) }
ع دالة لان كل عنصر من عناصر س ظهر مره واحده فقط
المدى = { ٣ ، ٦ ، ٩ }

مثال :- اذا كانت س = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } و كانت ع علاقة من س الى ص حيث " أ ع ب " تعنى ان " أ = ٢ ب " لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص فاكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى .

الحل :- { (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤) ، (١٠ ، ٥) } العلاقة دالة

مثال :- اذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٨ ، ٩ } و كانت ع علاقة من س الى ص حيث" أ ع ب " تعنى ان " أ^{٢} = ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى هل ع دالة ؟ و لماذا ؟

الحل :- ع = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) } العلاقه داله

تدريب :- اذا كانت ع علاقه من س الى ص بحيث أ ع ب تعنى ان أ تقسم ب و كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٧ } و كانت ص = { ٤ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ } أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و اخر بيانى و بين هل هى داله ام لا ؟ اذا كانت داله اذكر مداها

مثال :- اذا كان بيان الداله د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }

١ ـ أكتب كلا من مجال و مدى الدالة د ٢ ـ اكتب قاعدة الدالة د

الحل :- المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، المدى = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

قاعدة الدالة هى ب = ٢ أ + ١

تمارين على الدرس

١ ـ اذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } و كانت ع علاقة من س الى ص حيث " أ ع ب " تعنى ان " أ + ب = ٧ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص فاكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و بين هل ع داله ام لا مع ذكر السبب ؟ اذا كانت داله اذكر مداها

٢ ـ اذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } و كانت ع علاقة من س الى ص حيث " أ ع ب " تعنى ان " أ + ب < ٨ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ، و مثلها بمخطط سهمى هل ع دالة ؟ و لماذا ؟

٣ ـ اذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٤ } و كانت ع علاقة على س حيث " أ ع ب " تعنى ان " أ ضعف ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ س أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى ، هل ع دالة ؟ و لماذا ؟

٤ ـ اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ } و كانت ع علاقة على س حيث " أ ع ب " تعنى " أ + ٢ ب = عدد فردى " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ، و مثلها بمخطط سهمى هل ع دالة ؟ و لماذا ؟

٥ ـ اذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، و كانت ع دالة على س و كان بيان ع = { (أ ، ٢) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥) } فأوجد القيمة العدديه للمقدار أ + ب

علمتنى الرياضيات ان لكل مجهول قيمة فلا تحتقر احدا لا تعرفه

دوال كثيرات الحدود

الدالة كثيرة الحدود : هى دالة قاعدتها حد أو مقدار جبرى

مع ملاحظة أن : -

١ – دالة كثيرة الحدود يكون الاس فيها عدد طبيعى .

٢ – المجال و المجال المقابل فيها هو ح (مجموعة الاعداد الحقيقية)

درجة دالة كثيرة الحدود : هى اعلى قوة فى حدودها .

مثال :- بين اى من الدوال الاتيه كثيرة حدود و ايها غير ذلك مع ذكر الدرجة .

❶ د (س) = $س^{٢}$ + ٢س – ٣

الدالة كثيرة حدود و ذلك لتوافر الشروط بها حيث ان كل الاسس اعداد طبيعيه و هى مقدار جبرى و درجته الثانية

❷ د (س) = س × (س + $\frac{١}{س}$)

الحل :- الدالة ليست كثيرة حدود لان احد القوى عدد غير طبيعى

❸ د (س) = س $(س + ٢)^{٢}$

الحل:- د (س) = س ($س^{٢}$ + ٤ س + ٤) = $س^{٣}$ + ٤ $س^{٢}$ + ٤ س

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

❹ د(س) = $س^{٣}$ + ٢ $س^{-٢}$ – ٥ س

الحل الدالة ليست كثيرة حدود لان احد القوى عدد غير طبيعى

مثال :- اذا كانت د : د(س) = ٢ $س^{٢}$ – ٥ س + ٢ أثبت أن : د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الحل :- ∵ د (س) = ٢ $س^{٢}$ – ٥ س + ٢

∴ د (٢) = ٢ × $٢^{٢}$ – ٥ × ٢ + ٢ = ٨ – ١٠ + ٢ = صفر

∵ د (س) = ٢ $س^{٢}$ – ٥ س + ٢

∴ د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ – ٥ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = صفر

مثال :- اذا كانت (-١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = م س + ٢ أوجد قيمة م .

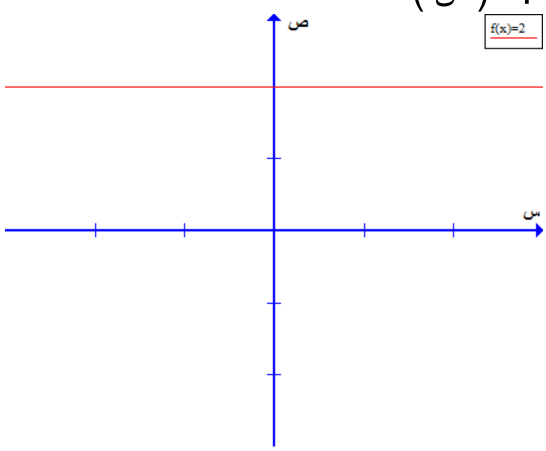
الحل :- بالتعويض عن نقطة فى الدالة ينتج ان : ٠ = - م + ٢   - م = - ٢   م = ٢

أنواع الدوال كثيرة الحدود

١ – الدالة الثابته : -

الدالة الثابته تكون على الصورة د (س) = ك حيث ك ∈ ح حيث ح هى مجموعة الاعداد الحقيقيه و تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات

مثلا د : د (س) = ٢



اذا كانت د (س) = ٥ فاوجد قيمة

١) د (٤) + ٢ د (١)

٢) $\frac{د(٢)}{د(-٣)}$

الحل :- ١) ∵ د (س) = ٥

∴ د (س) + ٢ د (س) = ٥ + ٢ × ٥ = ١٥

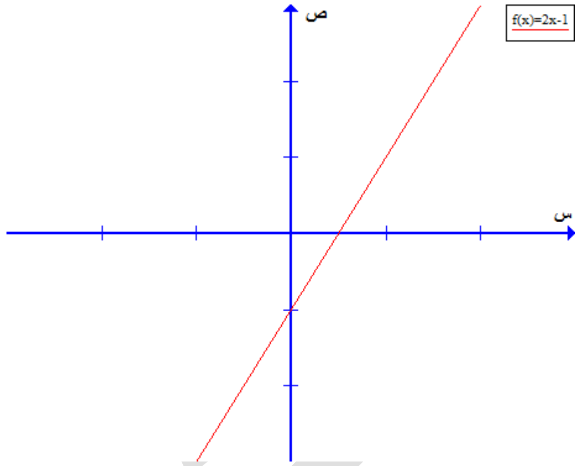
∴ $\frac{د(٢)}{د(-٣)}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

٢- الدالة الخطية :-

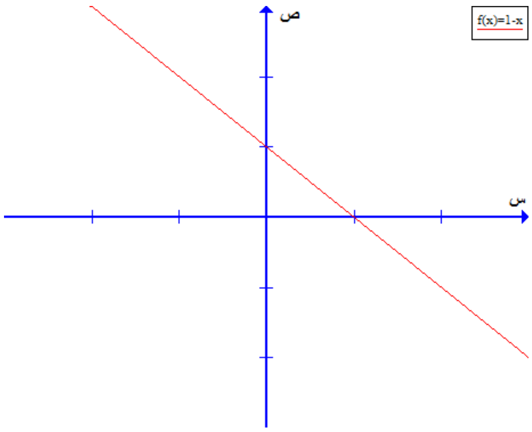
هى دالة قاعدتها مقدار جبرى من الدرجة الاولى

مثال :- مثل بيانيا الدالتين الاتيتين

د : د (س) = ٢س – ١



د : د (س) = ١ – س

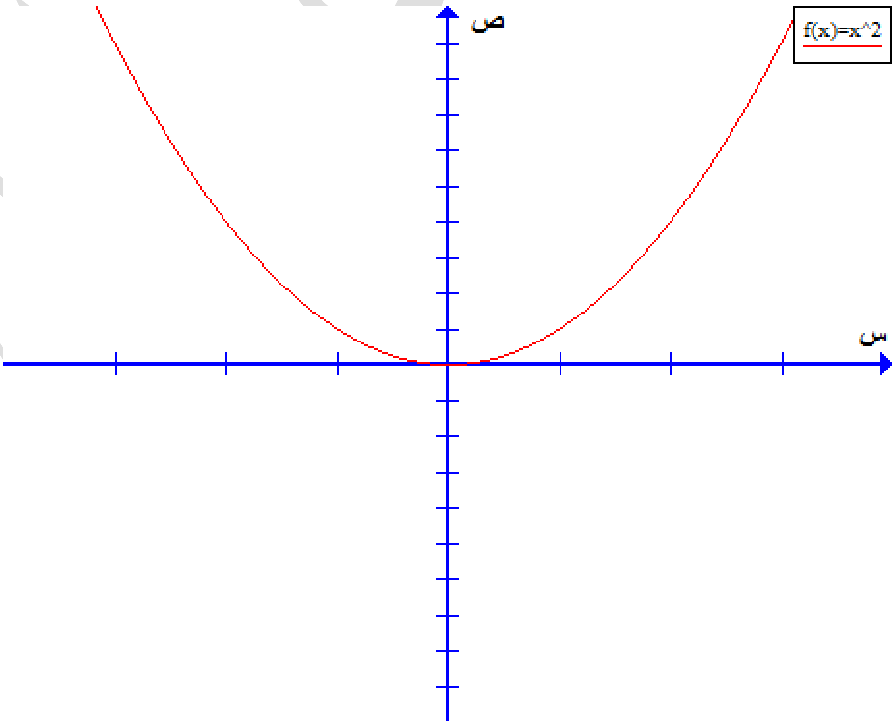


٣- الدالة التربيعية :-

هى دالة قاعدتها مقدار جبرى من الدرجة الثانيه

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د (س)	٩	٤	١	٠	١	٢	٣

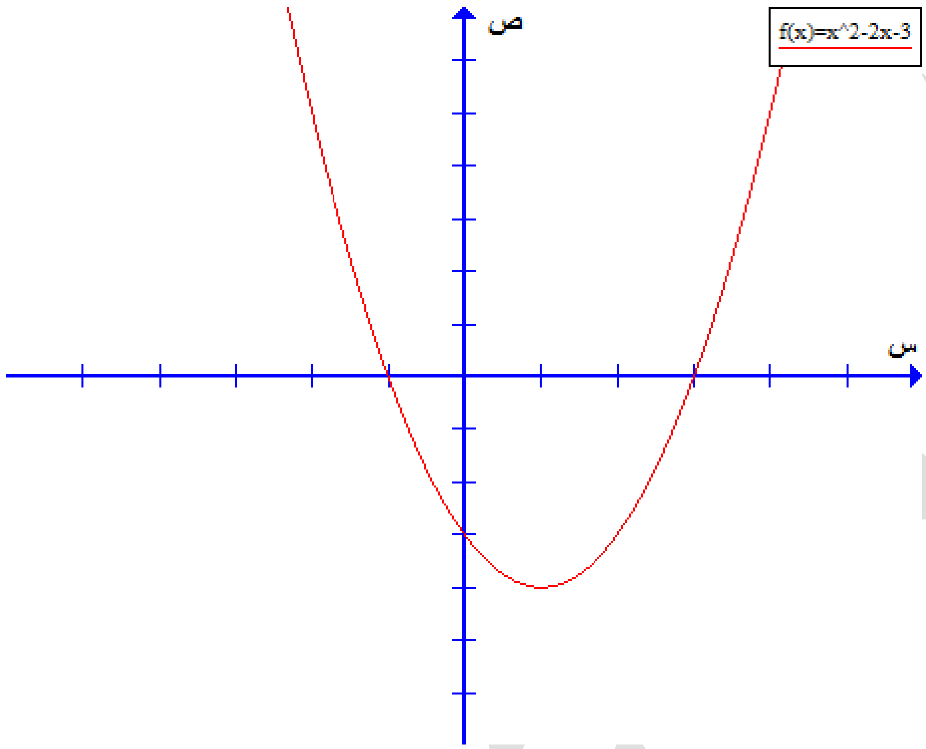
مثال بيانيا د : د (س) = س^{٢} متخذا س ∈ [-٣ ، ٣]



مثال :- ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = س^{٢} – ٢س – ٣ حيث س ∋ [-٢ ، ٤]
و من الرسم أوجد ١) نقطة راس المنحنى . ٢) معادلة محور التماثل .
٣) القيمة العظمى او الصغرى للدالة .

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

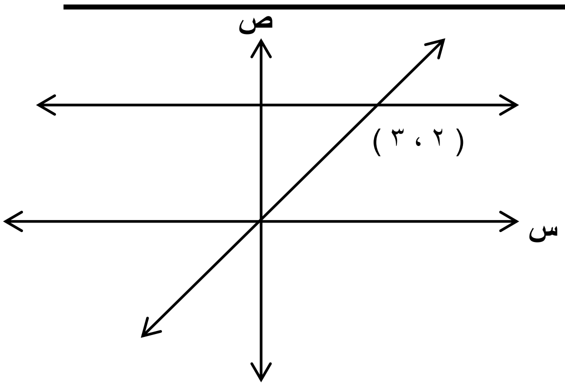
نقطة راس المنحنى : (١ ، -٤)
معادلة محور التماثل : س = ١
القيمة الصغرى للدالة = -٤



تدريب :- مثل بيانيا منحنى الدالة د حيث د (س) = س (٤ – س) متخذا س ∋ [-١ ، ٥]

مثال :- اذا كان المستقيم الممثل بيانيا للدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٢س – أ
يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٥) ، فأوجد قيمة : ٣ أ + ٢
الحل :- ∵ المستقيم الممثل للدالة يقطع الصادات فى النقطة (ب ، ٥) ∴ ب = ٠
و منها نستطيع ان نعوض بالنقطة (٠ ، ٥) فى الدلة د (س) = ٢ س – أ
٥ = ٢ × ٠ – أ و منها ٥ = - أ ∴ أ = -٥

تدريب : فى الشكل المقابل :-
الدالة الثابتة د تمثل بيانيا بالمستقيم ب أ و الدالة الخطية ر
تمثل بيانيا بالمستقيم و أ حيث : أ (٢ ، ٣)
١) أكتب قاعدة الدالة د و قاعدة الدالة ر .
٢) اوجد قيمة د (-١٠) + ر (٦).



تمارين على الدرس

أكمل ما يأتى :-

١- اذا كانت د (س) = ٣ فان د (٥) + د (-٥) = ...

٢ – الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٢ س – ١ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ......

٣ – الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٣ س + ٦ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ......

٤- اذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٤ س – ٥ فان : أ = ...

اختر الاجابة الصحيحه من الاجابات المعطاة :-

١ – الدالة د : د (س) = ٢ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(٢ ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

٢ – اذا كان : د (س) = س^{٢} – س (س -١)

الصفريه ، الاولى ، الثانية ، الثالثه

٣ – الدالة د حيث د (س) = س^{٤} – ٢ س + ٥ كثيرة حدود من الدرجة ....

الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة

٤- الدالة د حيث د (س) = س (س – ٢) كثيرة حدود من الدرجة ....

الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة

٥- الدالة د حيث د (س) = س (س + ٢)^{٢} كثيرة حدود من الدرجة ......

الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة

مثل بيانيا كل من الدوال الاتيه ، و من الرسم استنتج احداثى راس المنحنى ، و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة حيث س ∈ ح

١) د : د (س) = ٢ – س^{٢} متخذا س ∈ [-٣ ، ٣]

٢) د : د (س) = س^{٢} – ٢ س متخذا س ∈ [-٢ ، ٤]

٣) د : د (س) = (س – ٢)^{٢} متخذا س ∈ [-١ ، ٥]

٤) د : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ متخذا س ∈ [-٤ ، ٢]

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث :

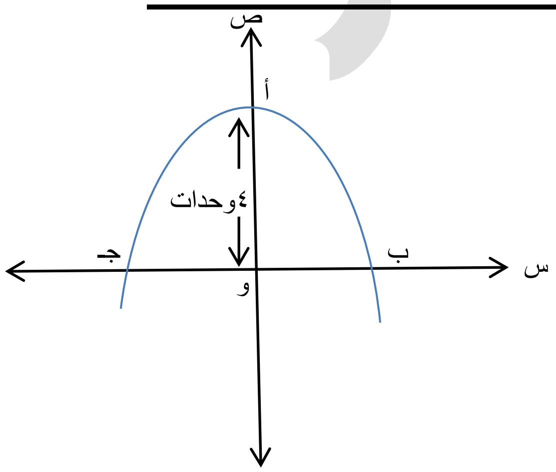
د (س) = م – س^{٢} ، اذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجـــد :-

١) قيمة م

٢) احداثيى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، جـ .



النسبـه

النسبة بين العددين أ ، ب هو خارج قسمة العدد أ على العدد ب و يكتب ذلك رياضيا بإحدى الصور التالية :- $\frac{أ}{ب}$

أ : ب او $\frac{أ}{ب}$ يسمى أ البسط أو المقدم ، يسمى ب المقام او التالى .

خواص النسبه :-

١) النسبه لا تتغير اذا ضرب حديها فى عدد ثابت ≠ ٠ ، و كذلك اذا قسم حداها على عدد ثابت ≠ ٠

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٢ \times ٣}{٣ \times ٣} = \frac{٦}{٩} \quad ، \quad \frac{١٥}{٢٠} = \frac{١٥ \div ٥}{٢٠ \div ٥} = \frac{٣}{٤}$$

٢) النسبة تتغير عند جمع او طرح اى عدد ≠ ٠

$$\frac{٢}{٣} \neq \frac{٢ + ١}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤} \quad ، \quad \frac{٢}{٣} \neq \frac{٢ - ١}{٣ - ١} \neq \frac{١}{٢}$$

٣) اذا تساوت نسبتان فانه ليس شرط ان تتساوى حدود أحد النسبتين مع الحدود المناظرة لها فى النسبه الاخرى

اذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فانه ليس من الضرورى ان يكون س = ٢ ، ص = ٣

عندما يكون $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فان س = ٢ م ، ص = ٣ م

مثال :- أوجد قيمة العدد الذى اذا اضيف لحدى النسبه $\frac{٧}{١١}$ فانها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل : - نفرض ان العدد المضاف هو س .

∴ $\frac{٧ + س}{١١ + ص} = \frac{٢}{٣}$ " و بضرب الطرفين و الوسطين "

∴ ٣ (٧ + س) = ٢ (١١ + س) ⇦ ٢١ + ٣ س = ٢٢ + ٢ س ⇦ ٣ س – ٢ س = ٢٢ – ٢١

∴ س = ١ ∴ قيمة العدد = ١

تدريب :- أوجد العدد الذى اذا اضيف ال كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فانها تصبح ٤ : ٥ .

مثال :- عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، اذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ أوجد العددين

الحل :- ∵ العددان النسبة بينهما ٣ : ٧ ∴ العدد الاول = ٣ م ، العدد الثانى = ٧ م

اذا طرح من كل منهما ٥ ∴ $\frac{٣م - ٥}{٧م - ٥} = \frac{١}{٣}$

٣ (٣ م – ٥) = ١ (٧ م – ٥) ⇦ ٩ م – ١٥ = ٧ م – ٥ ⇦ ٩ م – ٧ م = -٥ + ١٥

∴ م = ٥ ∴ العدد الاول = ٣ × ٥ = ١٥ ، العدد الثانى = ٧ × ٥ = ٣٥

ثانيا :- التناسب

* هو تساوى نسبتين أو أكثر

اذا ساوت النسبة $\frac{أ}{ب}$ النسبة $\frac{جـ}{د}$ (اى ان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$) فان الكميات : أ ، ب ، جـ ، د تكون متناسبة

و العكس اذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

يسمى : أ بالأول المتناسب ، ب بالثانى المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب ، د بالرابع المتناسب .

كما يسمى : أ ، د بطرفى التناسب ، ب ، جـ بوسطى التناسب .

مثال :- أوجد الثالث المتناسب للكميات : ٣ ، ٤ ، ٢٠

الحل :- نفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ الكميات ٣ ، ٤ ، س ، ٢٠ متناسبة

∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{س}{٢٠}$ ، ∴ ٣ × ٢٠ = ٤ × س ، ٤ س = ٦٠ ∴ س (الثالث المتناسب) = ١٥

نضع العدد حسب ترتيبه

مثال :- أوجد العدد الذى اذا أضيف الى كل من الاعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فانها تكون متناسبة .

نفرض ان العدد = س

∴ ٣ + س ، ٥ + س ، ٨ + س ، ١٢ + س متناسبة .

$\frac{٣+س}{٥+س} = \frac{٨+س}{١٢+س}$ ∴ (٣ + س) (١٢ + س) = (٥ + س) (٨ + س)

∴ ٣٦ + ٣ س + ١٢ س + $\cancel{س^٢}$ = ٤٠ + ٥ س + ٨ س + $\cancel{س^٢}$ ⇦ ٣٦ + ١٥ س = ٤٠ + ١٣ س

∴ ١٥ س – ١٣ س = ٤٠ – ٣٦ ⇦ ٢ س = ٤ ⇦ س = ٢ ∴ العدد هو ٢

مثال :- اذا كان : $\frac{س+٣ص}{٢س-ص} = \frac{٤}{٣}$ فأوجد النسبة س : ص

∵ $\frac{ب}{أ} =$ [illegible] ، ∴ ٣ (س + ٣ ص) = ٤ (٢س – ص) ⇦ ٣ س + ٩ ص = ٨ س – ٤ص

∴ ٩ص + ٤ ص = ٨س – ٣ س ⇦ ١٣ ص = ٥ س ⇦ س : ص = ١٣ : ٥

لاحظ أن :- اذا كان ٢ أ = ٣ ب فان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ب}{أ} = \frac{٢}{٣}$

تدريب :- اذا كان : $س^٢$ – ٤ ص = ٣ س ص فأوجد س : ص

خاصية هامة :-

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ فان أ = ٢ م ، ب = ٣ م

مثال :- اذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة : $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل :- ∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ ∴ س = ٢ م ، ص = ٣ م

$$\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م} = \frac{٦م + ٦م}{١٨م - ٢م} = \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{٣}{٤}$$

مثال :- أثبت أن : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اذا كان $\frac{أ + ب}{جـ + د} = \frac{ب}{د}$

∵ $\frac{أ + ب}{جـ + د} = \frac{ب}{د}$ ⇐ د (أ + ب) = ب (جـ + د) ⇐ أ د + $\cancel{ب د}$ = ب جـ + $\cancel{ب د}$

أ د = ب جـ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

مثال :- اذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ و كان أ + ب = ٢٧.٦ فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، جـ

الحل :- ∵ أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ ∴ أ = ٥ م ، ب = ٧ م ، جـ = ٣ م

∵ أ + ب = ٢٧.٦ ∴ ٥م + ٧م = ٢٧.٦ ⇐ ١٢ م = ٢٧.٦ ⇐ م = ٢.٣

∴ أ = ٥ × ٢.٣ = ١١.٥ ، ب = ٧ × ٢.٣ = ١٦.١ ، جـ = ٣ × ٢.٣ = ٦.٩

تمارين على الدرس

أكمل ما يأتى :-

١) اذا كان ٧ س = ٣ ص فان س : ص = ...

٢) اذا كان ٥ أ – ٤ب = ٠ فان أ : ب = ...

٣) اذا كان $\frac{٥س - ٧ص}{٨س + ١١ص}$ = ٠ فان $\frac{ص}{س}$ = ...

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

١) نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم الى مساحة منطقة مربعة اخرى طول ضلعها ٢ل سم كنسبة ....
(١ : ٢ ، ل : ٤ ، ١ : ٤ ، ٤ : ١)

٢) اذا كان $\frac{٣س}{٥ص}$ = $\frac{١}{٢}$ فان : $\frac{س}{ص}$ = ... (٦ : ٥ ، ٥ : ٦ ، ٢ : ٣ ، ٣ : ٢)

٣) اذا كان ٤س = ٥ ص فان : $\frac{٥ص}{٤س}$ = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

٤) اذا كان ٢ س = ٧ ص فـــان : $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١}$ = ... (٢ : ٧ ، ٧ : ٢ ، ٤٩ : ٤ ، ٤ : ٤٩)

٥) اذا كانت : أ ، س ، ب ، ٢ س كميات متناسبة فان : $\frac{أ}{ب}$ = ... (٢ : ١ ، ١ : ٢ ، ١ : ٣ ، ١ : ٤)

٦) الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ...... (٤ ، ٣٠ ، ٤٨ ، ٦٤)

٧) اذا كان $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٣}{٢}$ فان : $\frac{أ+ب}{أ-ب}$ = ... ($\frac{٣}{٢}$ ، ٥ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ٢)

أجب عن الاسئله الاتيه :-

١) أوجد العدد الذى اذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فانها تصبح $\frac{٢}{٣}$

٢) أوجد العدد الذى اذا أضيف مربعه الى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فانها تصبح ٤ : ٥

٣) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، اذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، اوجد العددين .

٤) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ و اذا اضيف للعدد الاصغر ٤ و طرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة

النسبة بينهما ٨ : ٩ أوجد العددين .

٥) أوجد العدد الذى اذا طرح من كل من الاعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فانها تكون متناسبة .

٦) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة ٧ أ + ٩ ب : ٤ أ + ٢ ب

٧) اذا كان ٢ أ = ٣ ب = ٤ جـ فأوجد أ : ب : جـ

٨) اذا كان : $\frac{٢١س + أ}{٧س + ب} = \frac{أ}{ب}$ ، س ≠ ٠ فأوجــد قيمـــة

٩) اثبت ان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اذا كان : $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

١٠) اذا كان : س^{٢} ـ ٤ ص^{٢} = ٣ س ص فـأوجــــــد س : ص $\frac{أ + ٢ب}{٢أ}$

دائماً عامل الناس على مبدأ : إن لم تنفعه فلا تضره،
وإن لم تفرحه فلا تغمه، وإن لم تمدحه فلا تذمه

ذ / احمد عادل احمد
مدرس رياضيات بمدرسة المالكى الاعداديه – نصر النوبه – اسوان
٠١١٥٣٠٢٦٦٧٦ – ٠١١٠٠٧١٨٣٥١

التناسب

* **إذا كانت** أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة و فرضنا أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \text{م}$ فإن أ = ب م ، ج = د م

مثال ١ :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت ان : $\frac{\text{٥أ} + \text{٣جـ}}{\text{٥ب} + \text{٣د}} = \frac{\text{٣أ} - \text{٢جـ}}{\text{٣ب} - \text{٢د}}$

الحل :- ∵ أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ∴ أ = ب م ، ج = د م

الطرف الايمن $= \frac{\text{٥أ} + \text{٣جـ}}{\text{٥ب} + \text{٣د}} = \frac{\text{٥(ب م)} + \text{٣(د م)}}{\text{٥ب} + \text{٣د}} = \frac{\text{٥ب م} + \text{٣د م}}{\text{٥ب} + \text{٣د}} = \frac{\text{م(٥ب} + \text{٣د)}}{\text{٥ب} + \text{٣د}} = \text{م}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{٣أ} - \text{٢جـ}}{\text{٣ب} - \text{٢د}} = \frac{\text{٣(ب م)} - \text{٢(د م)}}{\text{٣ب} - \text{٢د}} = \frac{\text{٣ب م} - \text{٢د م}}{\text{٣ب} - \text{٢د}} = \frac{\text{م(٣ب} - \text{٢د)}}{\text{٣ب} - \text{٢د}} = \text{م}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٢ :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت ان $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{د}^{٢}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}}$

الحل :- ∵ أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ∴ أ = ب م ، ج = د م

الطرف الايمن $= \frac{\text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{د}^{٢}} = \frac{\text{(ب م)}^{٢} + \text{(د م)}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{د}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{د}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{د}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢}\text{(ب}^{٢} + \text{د}^{٢}\text{)}}{\text{ب}^{٢} + \text{د}^{٢}} = \text{م}^{٢}$

الطرف الايسر $= \frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب م} \times \text{د م}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب د م}^{٢}}{\text{ب د}} = \text{م}^{٢}$ ∴ الطرفان متساويان

مثال :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثــبـــت ان : $\frac{\text{٢أ} + \text{٣جـ}}{\text{٧أ} - \text{٥جـ}} = \frac{\text{٢ب} + \text{٣د}}{\text{٧ب} - \text{٥د}}$

الحل :- ∵ اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الايمن $= \frac{\text{٢أ} + \text{٣جـ}}{\text{٧أ} - \text{٥جـ}} = \frac{\text{٢ب م} + \text{٣د م}}{\text{٧ب م} - \text{٥د م}} = \frac{\text{م(٢ب} + \text{٣د)}}{\text{م(٧ب} - \text{٥د)}} = \frac{\text{٢ب} + \text{٣د}}{\text{٧ب} - \text{٥د}} =$ الطرف الايسر

تدريب :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت ان : $\sqrt[٣]{\frac{\text{٥أ}^{٣} - \text{٣جـ}^{٣}}{\text{٥ب}^{٣} - \text{٣د}^{٣}}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$

مثال : اذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فاثبت ان :- $\frac{\text{٢ص} - \text{ع}}{\text{٣س} - \text{٢ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

∵ $\frac{\text{ب د م}^{٢}}{\text{ب د}}$ ∴ س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م

$\frac{٢ \times \text{٤م} - \text{٥م}}{٣ \times \text{٣م} - ٢ \times \text{٤م} + \text{٥م}} = \frac{\text{٨م} - \text{٥م}}{\text{٩م} - \text{٨م} + \text{٥م}} = \frac{\text{٣م}}{\text{٦م}} = \frac{١}{٢}$

تدريب :- $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{2}{5}$ فما قيمة المقدار:- $\frac{2\text{س} + \text{ص}}{\text{س} + 4\text{ص}}$

خاصية :- مجموع مقدمات و توالى عدة نسب يساوى احدى النسب

مثلا نعلم ان :- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ **فاذا جمعنا مقدمات او توالى كل او بعض النسب** $\frac{1+2}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{1+2+3}{2+4+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

بالتالى اذا جمعنا مقدمات و توالى كل او بعض النسب نجد انها تساوى احد النسب.

مثال :- **اذا كان** $\frac{\text{س}}{2\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{ص}}{2\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{2\text{جـ}-\text{أ}}$ **فاثبت ان :** $\frac{2\text{س}+\text{ص}}{4\text{أ}+4\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{2\text{س}+2\text{ص}+\text{ع}}{3\text{أ}+6\text{ب}}$

بضرب النسبة الاولى × ٢ و جمع مقدمات و توالى النسبتين

$$\frac{2\text{س}+\text{ص}}{2(2\text{أ}+\text{ب})+2\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{2\text{س}+\text{ص}}{4\text{أ}+2\text{ب}+2\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{2\text{س}+\text{ص}}{4\text{أ}+4\text{ب}-\text{جـ}}$$ **= احدى النسب** ← (١)

بضرب النسبة الاولى ×٢ و ضرب النسبة ×٢ و جمع مقدمات و توالى النسب الثلاث

$$\frac{2\text{س}+2\text{ص}+\text{ع}}{4\text{أ}+2\text{ب}+4\text{ب}-2\text{جـ}+2\text{جـ}-\text{أ}} = \frac{2\text{س}+2\text{ص}+\text{ع}}{3\text{أ}+6\text{ب}}$$ **= احدى النسب** ← (٢)

من العلاقتين رقم (١) ، (٢) ينتج ان $\frac{2\text{س}+\text{ص}}{4\text{أ}+4\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{2\text{س}+2\text{ص}+\text{ع}}{3\text{أ}+6\text{ب}}$

مثال :- **اذا كان** $\frac{\text{س}+\text{ص}}{7} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{5} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{8}$ **فاثبت ان :** $\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = 5$

بجمع مقدمات و توالى النسب الثلاث ينتج ان :-

$$\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ص}+\text{ع}+\text{ع}+\text{س}}{7+5+8} = \frac{2\text{س}+2\text{ص}+2\text{ع}}{20} = \frac{2(\text{س}+\text{ص}+\text{ع})}{20} = \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{10}$$ **= احدى النسب** ← (١)

بضرب النسبة الثانيه × -١ و جمعها مع النسبة الاولى ينتج ان :-

$$\frac{\text{س}+\text{ص}-\text{ص}-\text{ع}}{7-5} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{2}$$ **= احدى النسب** ← (٢)

من العلاقتين رقم (١) ، (٢) ينتج ان :-

$$\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{10} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{2} \Longleftarrow \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ص}} = \frac{10}{2} = 5$$

تدريب :- **اذا كان** $\frac{\text{أ}}{2} = \frac{\text{ب}}{3} = \frac{\text{جـ}}{4} = \frac{2\text{أ}-\text{ب}+5\text{جـ}}{3\text{س}}$ **فأوجد قيمة س**

تدريب :- **اذا كان** $\frac{\text{أ}}{2} = \frac{\text{ب}}{3} = \frac{\text{جـ}}{4}$ **فاثبت ان : ٢أ – ٥ ب + ٣ جـ = احدى النسب**

أ / أحـــمــد عـــادل

التناسب المتسلسل

يقال ان الكميات أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل اذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

يسمى أ بالاول المتناسب ، جـ الثالث المتناسب ، ب الوسط المتناسب بين أ ، جـ

مثال :- اوجد الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧

الحل: نفرض ان الوسط المتناسب س $\frac{٣}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{٢٧}$ بضرب الطرفين $\text{س}^{٢} = ٨١$ باخذ الجذر التربيعى للطرفين س = ± ٩

مثال :- اوجد الاول المتناسب للكميات ٦ ، ١٨

الحل :- نفرض ان الاول المتناسب س ، $\frac{\text{س}}{٦} = \frac{٦}{١٨}$ ⟸ $\text{س} = \frac{٦\times٦}{١٨} = ٢$

خاصيه هامه : اذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل يكون $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

و من خواص التناسب نجد ان جـ = د م ، ب = د $\text{م}^{٢}$ ، أ = د $\text{م}^{٣}$

مثال : اذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فأثبت ان $\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

∵ ب وسط متناسب بين أ ، جـ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ ∴ أ = جـ $\text{م}^{٢}$ ، ب = جـ م

الطرف الايمن= $\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}} = \frac{(\text{جـ}\,\text{م}^{٢})^{٢}+(\text{جـ}\,\text{م})^{٢}}{(\text{جـ}\,\text{م})^{٢}+\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٤}+\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}+\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}(\text{م}^{٢}+١)}{\text{جـ}^{٢}(\text{م}^{٢}+١)} = \text{م}^{٢}$

الطرف الايسر= $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}\,\text{م}^{٢}}{\text{جـ}} = \text{م}^{٢}$ **∴ الطرفان متساويان ∴** $\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

مثال : اذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فأثبت ان $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{٢\text{أ}}{\text{جـ}}$

بنفس حل المثال السابق نفرض ان أ = جـ $\text{م}^{٢}$ ، ب = جـ م

الطرف الايمن = $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{(\text{جـ}\,\text{م}^{٢})^{٢}}{(\text{جـ}\,\text{م})^{٢}} + \frac{(\text{جـ}\,\text{م})^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٤}}{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}} + \frac{\text{جـ}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \text{م}^{٢}+\text{م}^{٢} = ٢\text{م}^{٢}$

الطرف الايسر = $\frac{٢\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{٢\text{جـ}\,\text{م}^{٢}}{\text{جـ}} = ٢\text{م}^{٢}$

∴ الطرفان متساويان ∴ $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} = \frac{٢\text{أ}}{\text{جـ}}$

مثال :- اذا كانت ب وسط متناسبا بين أ ، جـ فأثبت ان : $\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-1}+ب^{-1}+جـ^{-1}} = ب^2$

بنفس حل المثال السابق نفرض ان أ = جـ $م^2$ ، ب = جـ م ، و لوجود اسس سالبه ف المقام نضرب × أ ب جـ بسطا و مقاما

الطرف الايمن =

$$\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-1}+ب^{-1}+جـ^{-1}} = \frac{أبجـ(أ+ب+جـ)}{أبجـ(أ^{-1}+ب^{-1}+جـ^{-1})} = \frac{أبجـ(أ+ب+جـ)}{بجـ+أجـ+أب} = \frac{جـم^2\times جـم\times جـ(جـم^2+جـم+جـ)}{جـم\times جـ+جـم^2\times جـ+جـم^2\times جـم}$$

$$= \frac{جـم^2\times جـم\times جـ(جـم^2+جـم+جـ)}{جـم\times جـ+جـم^2\times جـ+جـم^2\times جـم} = \frac{جـ^3م^3\times جـ(م^2+م+1)}{جـ^2م+جـ^2م^2+جـ^2م^3} = \frac{جـ^4م^3(م^2+م+1)}{جـ^2م(1+م+م^2)} = جـ^2م^2$$

الطرف الايسر = $ب^2$ = (جـ م $)^2$ = $جـ^2$ $م^2$

∴ الطرفان متساويان ∴ $\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-1}+ب^{-1}+جـ^{-1}} = ب^2$

مثال :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل فاثبت ان : $\frac{بد}{أ} = \frac{دم^2\times د}{دم^3} = \frac{د}{م}$

الحل : ∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل نفرض ان

أ = د $م^3$ ، ب = د$م^2$ ، جـ = د م ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

`الطرف الايمن = $\frac{جـ^2-د^2}{أ-جـ} = \frac{(دم)^2-د^2}{دم^3-دم} = \frac{د^2م^2-د^2}{دم^3-دم} = \frac{د^2(م^2-1)}{دم(م^2-1)} = \frac{د}{م}$

الطرف الايسر = $\frac{بد}{أ} = \frac{دم^2\times د}{دم^3} = \frac{د}{م}$

∴ الطرفان متساويان ∴ $\frac{جـ^2-د^2}{أ-جـ} = \frac{بد}{أ}$

مثال :- اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل اثبت ان :- $\frac{أب-جـد}{ب^2-جـ^2} = \frac{أ+جـ}{ب}$

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل نفرض ان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

∴ أ = د $م^3$ ، ب = د$م^2$ ، جـ = د م

$$\frac{أب-جـد}{ب^2-جـ^2} = \frac{دم^3\times دم^2-دم\times د}{(دم^2)^2-(دم)^2} = \frac{د^2م^5-د^2م}{د^2م^4-د^2م^2} = \frac{د^2م(م^4-1)}{د^2م^2(م^2-1)} = \frac{د^2م(م^2+1)(م^2-1)}{د^2م^2(م^2-1)} = \frac{م^2+1}{م}$$

$$\frac{أ+جـ}{ب} = \frac{دم^3+دم}{دم^2} = \frac{دم(م^2+1)}{دم^2} = \frac{م^2+1}{م}$$

تمارين على الدرس

١) اختر الاجابة الصحيحه من بين الاجابات المعطاة :

١ – اذا كان العدد ٦ هو الوسط المتناسب الموجب بين ٢ ، أ فان : أ = ...
(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٣٦)

٢ – اذا كان $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س + ص}{م}$ فان : م = ...
(٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩)

٣- الأول المتناسب للكميات : ٢١ ، ١٥ ، ٣٥ هو ....
(٣ ، ٧ ، ٩ ، ١٢)

٤- اذا كان $\frac{١٣أ - ٢ب}{١٧أ + ٤ب} = ٠$ فان : $\frac{ب}{أ}$ = ...
($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٧}{٤}$)

٥- اذا كانت : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{٥} = ٢$ فان : أ = ...
(٥×٢^{٢} ، ٤٠ ، ١٠ ، ٢×٥^{٣})

٦- اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = ٢$ فان $\frac{أ}{د}$ = ...
(٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

٧- اذا كان : أ ، ٢ ، ٤ ، ب فى تناسب متسلسل فان أ + ب = ...
(١ ، ٧ ، ٨ ، ٩)

٨- العدد الذى اذا أضيف لكل من الاعداد ١ ، ٣ ، ٦ لتصبح فى تناسب متسلسل هو ....
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

٩ – الوسط المتناسب بين العددين ٤ ، ٢٥ يساوى ....
(١٠ ، ٢٩ ، ١٠٠ ، ±١٠)

١٠- اذا كان : $\frac{أ + ب}{٥} = \frac{أ - ب}{٣}$ فان : $\frac{أ}{ب}$ = ...
($\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٤}$)

١١- اذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فان : $\frac{ب - أ}{ب + أ}$ = ...
($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)

١٢- اذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل فان $س^{٢}$ ص = ...
($\frac{١}{٧}$ ، ٧ ، ٤٩ ، $\frac{١}{٤٩}$)

٢) اذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٤}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٣}}$ اثبت ان : $\frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} + \text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٣) اذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ اثبت ان $\sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}}} = \text{٢س} + \text{ص}$

٤) اذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{\text{٦}}$ فاثبت ان $\frac{\text{س} - \text{ع}}{\text{٢}} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٧}}$

٥) اذا كان ٣ أ = ٢ ب فاوجد قيمة : $\frac{\text{٣أ} - \text{ب}}{\text{٢أ} + \text{ب}}$

٦) اذا كانت : $\frac{\text{٢١س} + \text{أ}}{\text{٧س} + \text{ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، س ≠ . فأوجد قيمة $\frac{\text{أ} + \text{٢ب}}{\text{٢أ}}$

٧) اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اثبت ان $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$

٨) اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اثبت ان $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{أب} + \text{جـد}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٩) اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اثبت ان $\frac{\text{أجـ}}{\text{بد}} = \left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{\text{٢}}$

١٠) اوجد العدد الذى اذا طرح من الاعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فانها تكون تناسبا متسلسلا

١١) اذا كان $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$ فأثبت ان ب وسط متناسب بين أ ، جـ

١٢) اذا كانت ب وسطا متناسبه بين أ ، جـ فأثبت ان : $\frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

١٣) اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فأثبت ان : $\frac{\text{جـ}^{\text{٢}} - \text{د}^{\text{٢}}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

١٤) اذا كانت ٥أ ، ٢ص ، ٣ب ، ٧ص كميات متناسبة أوجد أ : ب

١٥) اذا كانت $\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦٤ ص}^{\text{٢}} = \text{١٦ س ص}$. أوجد قيمة $\frac{\text{٢س} + \text{٣ص}}{\text{س} - \text{٥ص}}$

١٦) اذا كانت ٢ ، س ، ص ، ١٦ كميات فى تناسب متسلسل اوجد قيمة س ، ص

~ لا تمنعك الظروف من تحقيق ما تريد ~

الـتـغـــيـــر

التغير الطردى	التغير العكسى
١ - كلما زاد المتغير الاول يزيد المتغير الثانى و العكس اذا قل المتغير الاول يقل معه المتغير الثانى مثلا : العلاقه بين طول ضلع مربع و محيطه اذا زاد طول ضلع المربع يزيد محيطه و العكس .	**١** – كلما زاد المتغير الاول يقل المتغير الثانى و اذا قل المتغير الاول زاد المتغير الثانى . مثلا طول المستطيل و عرضه علاقه عكسيه عند ثبوت المساحه .
٢- يقال أن ص تتغير تغيراً طردياً مع س ويرمز لها بالرمز $\text{ص} \propto \text{س}$ اذا كان : $\text{ص} = \text{م س}$ (اى ان : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{م}$) حيث م ثابت ≠ ٠ .	**٢**- يقال أن ص تتغير عكسيا مع س و تكتب بالرمز $\text{ص} \propto \frac{1}{\text{س}}$ اذا كان (اى أن $\text{ص س} = \text{م}$)
٣ – اذا اخذ المتغير س قيمتين س_1 ، س_2 و أخذ المتغير ص قيمتين ص_1 ، ص_2 فان أ) $\text{ص} = \text{م س}$ ب) $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$	**٣**- اذا اخذ المتغير س قيمتين س_1 ، س_2 و أخذ المتغير ص قيمتين ص_1 ، ص_2 فان أ) $\text{ص} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$ ب) $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

مثال : اذا كانت ص $\propto$ س و كانت ص = ٢٠ عند س = ٧ فأوجدالعلاقة بين س ، ص ثم اوجد ص عندما س = ١٤

الحل :- $\because$ ص $\propto$ س ، $\therefore$ ص = م س حيث م ثابت $\neq$ صفر

$\because$ ص = ٢٠ عندما س = ٧ $\therefore$ ٢٠ = م × ٧ $\therefore$ م = $\frac{٢٠}{٧}$

$\therefore$ ص = $\frac{٢٠}{٧}$ × س هى العلاقة بين س ، ص

و عندما س = ١٤ $\therefore$ ص = $\frac{٢٠}{٧}$ × ١٤ $\therefore$ ص = ٤٠

مثال : اذا كانت ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ و كانت ص = ٣ عندما س = ٢ ، أوجد :

١) العلاقة بين س ، ص .   ٢) قيمة ص عندما س = ١.٥

الحل : - $\because$ ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ ، $\therefore$ ص = $\frac{م}{س}$ حيث م ثابت $\neq$ صفر

$\because$ ص = ٣ عندما س = ٢ $\therefore$ ٣ = $\frac{م}{٢}$ $\therefore$ م = ٦

$\therefore$ ص = $\frac{٦}{س}$ هى العلاقة بين س ، ص

$\therefore$ عندما س = ١.٥ $\therefore$ ص = $\frac{٦}{١.٥}$ = ٤

مثال : اذا كانت ص $\propto$ $\sqrt[٣]{س}$ و كانت ص = $\frac{٢}{٣}$ ، س = ٨ أوجد قيمة س عندما ص = ١

الحل :- هنا لم يطلب العلاقة بين س ، ص لذلك لا يوجد داعى لايجاد العلاقه

$\because$ ص $\propto$ $\sqrt[٣]{س}$ $\therefore$ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{\sqrt[٣]{س_١}}{\sqrt[٣]{س_٢}}$

$\frac{\frac{٢}{٣}}{١} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{س_٢}}$ ⟵ $\frac{٢}{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{س_٢}$ ⟵ $\sqrt[٣]{س_٢} = ٣$ بتكعيب الطرفين $ص_٢ = ٢٧$

مثال :- اذا كان ص = أ – ٩ ، أ $\propto \frac{١}{س}$ و اذا كان أ = ٤ عندما س = $\frac{١}{٢}$ فأوجد :

١) العلاقه بين س ، ص   ٢) قيمة ص عندما س = ١

الحل :- ∵ أ $\propto \frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{م}{س}$ ⟵ عندما أ = ٤ س = $\frac{١}{٢}$ ، ٤ = $\frac{م}{\frac{١}{٢}}$ ⟵ م = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

أ = $\frac{٢}{س}$ و بالتعويض فى العلاقة ص = أ – ٩ ⟵ ص = $\frac{٢}{س}$ - ٩ و هذه العلاقه بين س ، ص

عند س = ١ ص = $\frac{٢}{١}$ - ٩ = ٢ – ٩ = -٧

مثال : اذا كانت س^٢ ص^٢ – ٦ س ص + ٩ = ٠ فأثبت ان : ص تتغير عكسيا مع س

الحل :- س^٢ ص^٢ – ٦ س ص + ٩ = ٠ ⟵ (س ص – ٣)^٢ = ٠ باخذ الجذر التربيعى للطرفين

س ص – ٣ = ٠ ⟵ س ص = ٣ ⟵ ص = $\frac{٣}{س}$ ∴ ص $\propto \frac{١}{س}$

مثال :- اذا كان : $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت ان ص ∝ ع

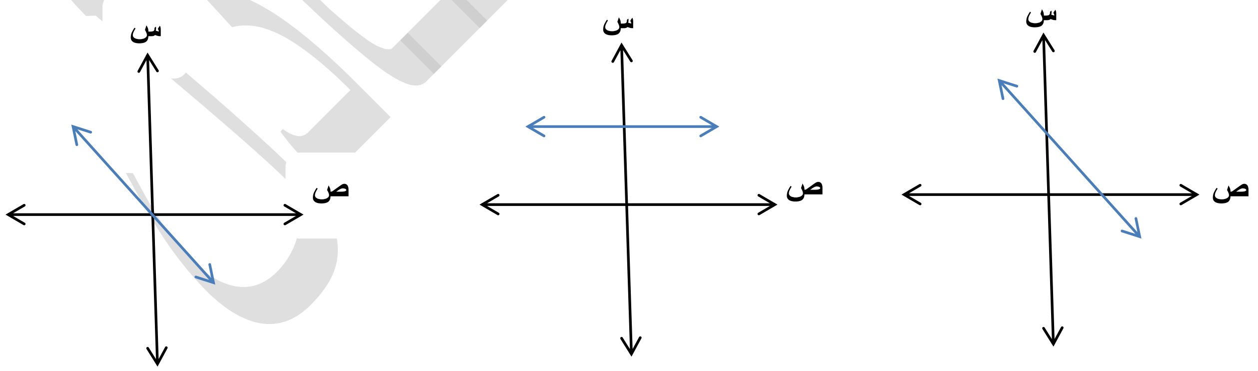
$\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ ⟵ (٢١ س – ص) ع = (٧ س – ع) ص ⟵ ٢١س ع – ص ع = ٧ س ص – ص ع

٢١س ع – $\cancel{ص ع}$ + $\cancel{ص ع}$ = ٧ س ص ⟵ ٢١ س ع = ٧ س ص ⟵ ص = $\frac{٢١ س ع}{٧ س}$ = ٣ ع

∵ ص = ٣ ع ∴ ص ∝ ع

تدريب :-

١) اى من الاشكال البيانيه الاتيه التى تمثل التغير الطردي بين س ، ص هو .....



تمارين على الدرس

اختر الاجابه الصحيحه من بين الاجابات المعطاه

١) العلاقة التى تمثل تغيرا طرديا بين المتغيرين ص ، س هي ......
(س ص = ٥ ، ص = س + ٣ ، $\frac{\text{ص}}{٣} = \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٢}$)

٢) اذا كانت ص ∝ س و كانت ص = ٥ عندما س = ٣ فان : ثابت التغير = ...
(١٥ ، ٥ ، ٣ ، $\frac{٥}{٣}$)

٣) اذا كانت ص تتغير عكسيا مع س و كانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فان ثابت التناسب = ...
($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ٦)

٤) اذا كانت : $\text{ص}^٢$ – ٤ س ص + ٤ $\text{س}^٢$ = ٠ فان : ....
(ص ∝ س ، ص ∝ $\text{س}^٢$ ، ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ، ص ∝ $\frac{١}{\text{س}^٢}$)

٥) اذا كانت : ص = ٣ س – ٦ فان : ص ∝ ......
(س ، ٣ س ، س - ٢ ، ٣ س - ٦)

٦) اذا كانت : $\frac{\text{ص} + ٣}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠ فان ص ∝ ....
(س ، $\frac{١}{\text{س}}$ ، س + ٢ ، س + ٥)

٧) اذا كان : ص – س = $\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{ص}}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠ فان : ....
(ص ∝ س +١ ، ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ، ص ∝ $\frac{١}{\text{س}^٢}$)

---

٢) اذا كانت ص ∝ $\text{س}^٣$ ، و كانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ أوجد العلاقه بين س ، ص ثم اوجد قيمة ص = ٣٢

٣) اذا كانت ص ∝ (س + ١) أوجد العلاقه بين س ، ص اذا كانت س = ٣ عندما ص = ٢

٤) اذا كانت ص تتغير عكسيا مع $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = ٢ عندما س = ١٦ فاوجد قيمة ص عندما س = ٣٢

٥) اذا كانت ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسيا مع مربع س و كانت ص = ١٧ عندما س = $\frac{١}{٢}$
أوجد العلاقه بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

٦) اذا كان $\text{س}^٤ \text{ص}^٢$ – ١٤ $\text{س}^٢$ ص + ٤٩ = ٠ فاثبت ان ص ∝ $\frac{١}{\text{س}^٢}$

٧) من بيانات الجدول الاتى : بين نوع التغير ، ثم أوجد ثابت التناسب
أوجد قيمة ص عندما س = ٣

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

حساب المثلثات

النسب المثلثيه الاساسيه للزاويه الحاده

سبق لنا دراسة وحدات القياس الستينى بالدرجة و الدقيقة و الثوانى

📖 مثال :- اذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستينى لكل منهما

الحل : ∵ النسبة بين قياسى الزاويتين المتكاملتين ٣ : ٥ نفرض ان الزاويه الاولى = ٣ م ، الزاويه الثانيه = ٥ م

∵ الزاويتين متكاملتين ∴ ٣ م + ٥ م = ١٨٠° ⟵ ٨ م = ١٨٠° ⟵ م = ١٨٠° ÷ ٨ = ٣٠/ ٢٢°

∴ الزاويه الاولى = ٣ × ٣٠/ ٢٢° = ٣٠/ ٦٧°
الزاويه الثانى = ٥ × ٣٠/ ٢٢° = ٣٠/ ١١٢°

النسبة المثلثيه للزاويه الحاده

النسبة المثلثيه للزاويه الحاده : هى نسبة بين طول ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاويه التى تقع فيه هذه الزاويه .
يوجد ثلاث نسب مثلثيه أساسيه للزاويه الحاده و هى :

جيب الزاويه : و يرمز لها بالرمز (جا) و تساوى (طول الضلع المقابل للزاويه) / (طول الوتر)

جيب تمام الزاويه : و يرمز لها بالرمز (جتا) و تساوى (طول الضلع المجاور للزاوية) / (طول الوتر)

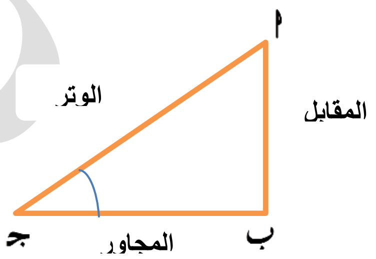
ظل الزاوية : يرمز لها بالرمز (ظا) و تساوى (طول الضلع المقابل للزاوايه) / (طول الضلع المجاور للزاوايه)

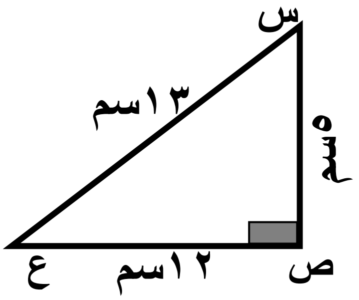
مثلا فى الشكل المقابل : اذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاويه فى ب فان :

جا جـ = المقابل / الوتر = أب / أجـ

جتا جـ = المجاور / الوتر = بجـ / أجـ

ظا جـ = المقابل / المجاور = أب / بجـ





مثال : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، س ص= ٥ سم ، س ع= ١٣سم، أوجد النسب المثلثية للزاوية س، والزاوية ع

ثم أوجد قيمة :-

(أ) ظا س + ظا ع   (ب) جتا س جتا ع – جاس جاع

اثبت ان : جا س جتا ع + جتاس جا ع = ١

الحل :- باستخدام فيثاغورث $(\text{ص ع})^٢ = (\text{س ع})^٢ - (\text{س ص})^٢ = ١٦٩ - ٢٥$

$(\text{ص ع})^٢ = ١٤٤ \Longleftarrow$ ص ع = ١٢سم

النسب المثلثية للزاوية س $\Longleftarrow$ جا س $=\frac{١٢}{١٣}$ جتا س $= \frac{٥}{١٣}$ ظا س $= \frac{١٢}{٥}$

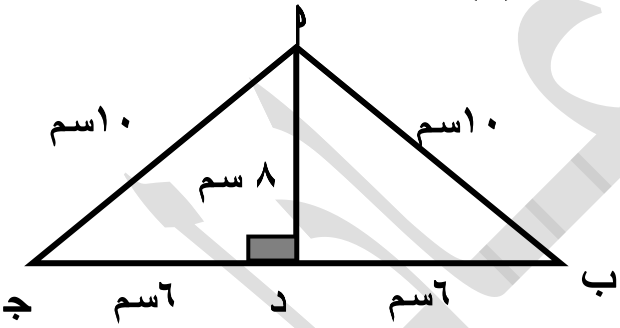
النسب المثلثية للزاوية ع $\Longleftarrow$ جا ع $=\left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢$ جتا ع $= \frac{١٢}{١٣}$ ظا ع $= \frac{٥}{١٢}$

ظا س + ظا ع $= \left(\frac{٦}{١٠}\right)^٢ + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٤٤}{٦٠} + \frac{٢٥}{٦٠} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

جتا س جتاع – جا س جا ع $= \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} =$ صفر

جا س جتا ع + جتا س جا ع $= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ \times \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٦٩}{١٦٩} = ١$

مثال : - ﻫب جـ Δ فيه ﻫ ب = ﻫ جـ = ١٠سم، ب جـ =١٢سم ، رسم $\overrightarrow{\text{ﻫ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في د **اثبت أن : (ﻫ) جا^{٢}جـ + جتا^٢ جـ =١   (ب) : جا ب + جتا ب >١**



الحل : $\because$ ﻫب جـ Δ ، $\overrightarrow{\text{ﻫ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ جا جـ $=\frac{٨}{١٠}$ ،   جتا جـ $=\frac{٦}{١٠}$

$\therefore$ جا^{٢}جـ + جتا^٢ جـ =

$\therefore \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ + \left(\frac{٦}{١٠}\right)^٢ = \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠} = ١$

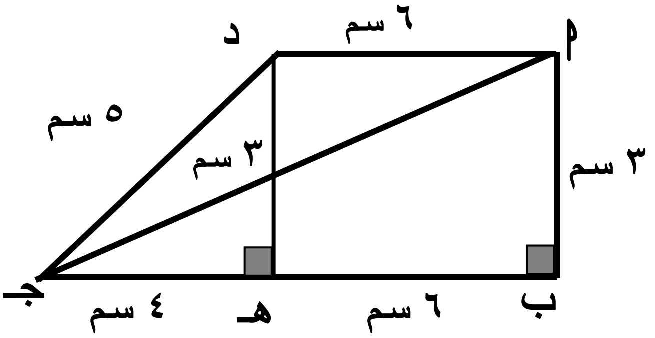
$\because$ فى Δ ﻫ د جـ ، $\overrightarrow{\text{ﻫ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ جا ب $=\frac{٨}{١٠}$ ،   جتا ب $=\frac{٦}{١٠}$

$\therefore$ جاب + جتاب $= \frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠} = ١.٤ > ١$

مثال :- **أب جـ د شبه منحرف فيه أ د // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(ب̂) = ٩٠ ° ، أب = ٤سم**

أد =٦سم ، ب جـ =١٠سم <u>أثبت أن</u> : جتا (د جـ̂ ب) – ظا(أجـ̂ب) = $\frac{١}{٢}$



الحل :

العمل : نرسم $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل

أ ب = هـ د = ٣ سم

∵ ب جـ = ١٠ سم ، ب هـ = ٦ سم

∴ هـ جـ = ٤ سم

فى Δ د هـ جـ القائم الزاويه جتا (د جـ̂ هـ) = $\frac{٤}{٥}$

∵ ب ∈ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ق (د جـ̂ هـ) = ق (د جـ̂ ب) جتا (د جـ̂ ب) = $\frac{٤}{٥}$

فى Δ أ ب جـ القائم الزاويه فى ب ظا (أ جـ̂ ب) = $\frac{٣}{١٠}$

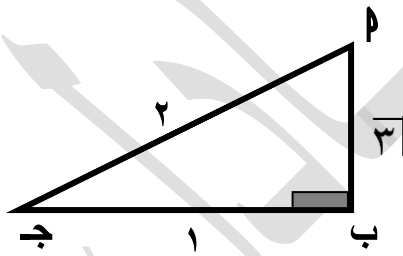
جتا (د جـ̂ ب) – ظا (أجـ̂ب) = $\frac{٤}{٥}$ - $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٨}{١٠}$ - $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

تدريب :- فى Δ أ ب جـ القائم الزاويه فى ب اذا كان ٥ جا أ – ٣ = ٠ اوجد جتا أ ، ظا جـ

مثال :- أ ب جـ Δ قائم الزاويه فى ب اذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أجـ فاوجد النسب المثلثيه للزاويه جـ

الحل : ∵ أ ب جـ Δ قائم الزاويه فى ب

٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$



باستخدام نظرية فيثاغورث :- (ب جـ)^٢ = (أجـ)^٢ - (أب)^٢

(ب جـ)^٢ = (٢)^٢ – ($\sqrt{٣}$)^٢ = ٤ - ٣ = ١

جا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ ظا جـ = $\frac{١}{٢}$

تمارين على الدرس

(١) **اختر الاجابة الصحيحه من بين الاجابات المعطاه**

(أ) لأي زاويه حاده ϻ يكون ظا ϻ = ...

($\frac{\text{جتا ϻ}}{\text{جا ϻ}}$ ، جا ϻ جتا ϻ ، $\frac{\text{جا ϻ}}{\text{جتا ϻ}}$ ، جا ϻ + جتا ϻ)

(ب) فى Δ ϻ ب جـ اذا كان ق (ϻ) = ٦٠° ، جا جـ = جتا جـ فان : ق (ب) = ...

(٦٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٧٥°)

(جـ) فى Δ ϻ ب جـ القائم الزاويه فى ب يكون : جا ϻ + جتا جـ = ...

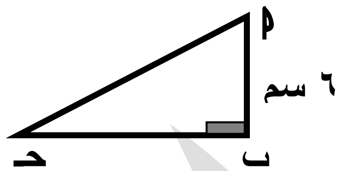
(٢ جا ϻ ، ٢ جا جـ ، ٢ جا ب ، ٢ جتا ϻ)

---

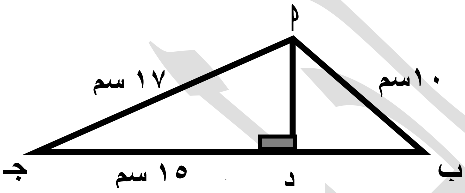
٢) اذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخله لمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل زاويه .

٣) ϻ ب جـ مثلث فيه : ق (ϻ) = ٩٠° ، ϻجـ = ١٥ سم ، ϻب = ٢٠ سم
أثبت ان جتا جـ جتاب – جا جـ جا ب = صفر

٤) ϻ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فاذا كان ϻب : ϻجـ = ٣ : ٥ فاوجد النسب المثلثيه الاساسيه للزاويه ϻ



٥) ϻ ب جـ مثلث قائم الزاويه فى ب ، ϻب = ٦ سم ، ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$
أوجد (أ) طول كل من ب جـ ، ϻ جـ
ب) جا ϻ + جتا ϻ



٦) ϻ د ⊥ ب جـ ، ϻ جـ = ١٧ سم ، د جـ = ١٥ سم
ϻب = ١٠سم أوجد قيمة : ٣ ظا جـ + جا ب

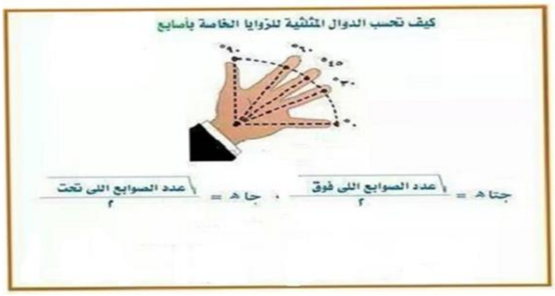
٧) ϻب جـ مثلث متساوي الساقين فيه ϻب = ϻجـ ، جا $\frac{\text{ϻ}}{٢}$ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد جتا ب بدون استخدام الاله الحاسبة .

٨) ϻب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه ϻد // ب جـ ، ϻد = ٤ سم ، ϻب = ٥ سم

ب جـ = ١٢ سم أثبت ان : $\frac{\text{٥ظاب جتاجـ}}{\text{جا}^٢\text{جـ+جتا}^٢\text{ب}}$ = ٣

النسب المثلثيه الاساسيه لبعض الزوايا

الجدول التالى يلخص لنا النسب المثلثية للزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°



	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

مثال : بدون استخدام الاله الحاسبة أثبت ان جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

الحل : الطرف الايمن = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، الطرف الايسر = $٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

تدريب : اثبت بدون الاله الحاسبه ان : جتا^{٢} ٦٠° = ٥ جا^{٢} ٣٠° - ظا^{٢} ٤٥°

مثال : أوجد قيمة س اذا كان جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠° حيث ٠° < س < ٩٠°

جاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ⟵ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (س) = ٣٠°

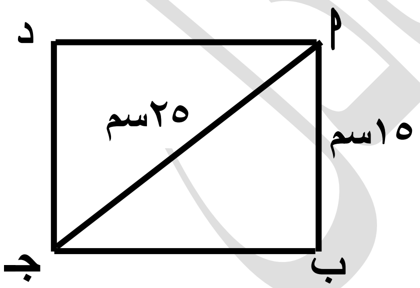
إيجاد زاويه اذا علم احد نسبها المثلثيه :

اذا علم ان جا هـ = ٠.٨ باستخدام الاله كالاتى ''' ⟶ = ⟶ 0.8 ⟶ sin ⟶ shift

مثال :- فى الشكل المقابل :

أب جـ د مستطيل فيه أب = ١٥ سم ، أجـ = ٢٥ سم

أوجد ١) ق (أ $\hat{جـ}$ ب) ٢) مساحة المستطيل أب جـ د



الحل :- فى Δ أ ب جـ القائم الزاويه فى ب

جا (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$

باستخدام الاله الحاسبه نجد ان ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٦° ٥٢// ١٢/

باستخدام نظرية فيثاغورث نجد ان ب جـ = ٢٠ سم

مساحة المستطيل أب جـ د = الطول × العرض = ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ سم^{٢}

تمارين على الدرس

أ) اختر الاجابه الصحيحه من بين الاجابات المعطاة :

١) اذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاويه حاده فان ق ($\hat{س}$) = ...
(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

٢) اذا كان س قياس زاويه حادة و كان : جا س = $\frac{١}{٢}$ فان : جا ٢ س = ...
(١ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

ب) ﻡ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ﻡ ب = ﻡ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد :
١) ق (ﺏ)		٢) مساحة المثلث ﻡ ب جـ لاقرب رقمين عشريين .

جـ) ﻡ ب جـ د متوازى أضلاع مساحته ٩٦ سم^{٢} ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣ ، ﻡ هـ ⊥ ب جـ
ﻡ هـ = ٨ سم .	أوجد	١) طول ﻡ د	٢) ق (ﺏ)
٣) طول ﻡ ب لأقرب رقم عشرى واحد

د) ﻡ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين فيه ﻡ ب = ﻡ د = د جـ = ٥ سم
ب جـ = ١١ سم
أوجد :	١) ق ($\hat{ب}$) ، ق ($\hat{ﻡ}$)	٢) مساحة شبه المنحرف ﻡ ب جـ د .

هـ) بدون استخدام الاله الحاسبة أثبت ان :
١) جا ٣٠° + ظا ٤٥° + جتا ٦٠° = ٤ جا ٤٥° جتا ٤٥°
٢) ٢ جا^{٢} ٤٥° ـ جا ٦٠° جتا ٣٠° = جا ٣٠° ـ جتا^{٢} ٦٠°

و) اوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة فى كل مما يأتى :
٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

البعد بين النقطتين

اذا كانت أ = ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب = ($س_2$ ، $ص_2$) فان أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

ملاحظات هامة :

❶ لاثبات ان اى ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت ان اكبر بعد يساوى مجموع البعدين الاخرين

❷ لاثبات ان النقط أ ، ب ، جـ تكون رؤوس مثلث نثبت ان مجموع اى بعدين اكبر من البعد الثالث

❸ لايجاد نوع المثلث بالنسبة لزواياه

لاثبات ان النقط أ ، ب ، جـ تكون رؤوس مثلث قائم او منفرج او حاد فاننا نوجد أ ب ، ب جـ ، جـ أ

فاذا كان أ جـ أكبر ضلع مثلا فتصبح كالتالى :

لاثبات ان المثلث قائم الزاويه نثبت ان : $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

لاثبات ان المثلث منفرج الزاويه نثبت ان : $(أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

لاثبات ا ن المثلث حاد الزاويه نثبت ان : $(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

❹ لاثبات ان النقط أ ، ب ، جـ ، د رؤوس متوازى أضلاع ثبت ان أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د اى كل ضلعين متقابلين متساويين ، و ثبت ان ٣ نقط ليست على استقامه واحده اى ان أ ب + ب جـ > أ جـ

❺ لاثبات ان الشكل الرباعي أ ب جـ د :

متوازى أضلاع نثبت ان أب = جـ د ، ب جـ = أ د

مستطيل نثبت ان أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د

مربع ثبت ان أب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ = ب د

معين ثبت ان أب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ ≠ ب د

❻ نوع المثلث بالنسبة لاضلاعه : نوجد الابعاد الثلاثه اذا كانت الثلاث ابعاد متساويه يصبح المثلث متساوى الاضلاع ، ضلعين فقط متساوين يصبح المثلث متساوى الساقين ، اذا اختلفت جميع الاضلاع اصبح مختلف الاضلاع

مثال : اوجد طول أ ب اذا كان أ = (٣ ، ٢) ، ب = (٦ ، ٨)

أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$\sqrt{(٦ - ٣)^2 + (٨ - ٢)^2} = \sqrt{(٣)^2 + (٦)^2} = \sqrt{٩ + ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

مثال : **اثبت ان المثلث الذى رؤوسه النقط أ = (٦ ، ٠) ، ب = (٢ ، - ٤) ، جـ = (-٤ ، ٢) قائم الزاويه فى ب ثم اوجد مساحة سطحه** .

الحل : البعد بين النقطتين = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (-٤ - ٠)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$

ب جـ = $\sqrt{(-٤ - ٢)^٢ + (٢ - (-٤))^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + (٦)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٣٦} = \sqrt{٧٢} = ٦\sqrt{٢}$

أ جـ = $\sqrt{(-٤ - ٦)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{(-١٠)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{١٠٠ + ٤} = \sqrt{١٠٤} = ٢\sqrt{٢٦}$

$(\text{أ ب})^٢ = ٣٢$ ، $(\text{ب جـ})^٢ = ٧٢$ ، $(\text{أ جـ})^٢ = ١٠٤$

نجد أن $(\text{أ جـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢$ ∴ المثلث قائم الزاويه فى ب

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٤\sqrt{٢} \times ٦\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

تدريب : حدد نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ = (١ ، -٢) ، ب = (-٤ ، ٢) ، جـ (٤ ، ٥) بالنسبة لاضلاعه و بالنسبة لزواياه .

تدريب ٢ : اثبت ان الشكل أ ب جـ د متوازى اضلاع اذا كان : أ = (-٢ ، ٤) ، ب = (٥ ، -٣) جـ = (٥ ، ٧) ، د = (٤ ، ٤)

مثال :- أثبت ان النقط أ = (٥ ، ١) ، ب = (١ ، ٥) ، جـ = (-١ ، ٣) ، د = (٣ ، -١) هى رؤوس مستطيل ثم أوجد مساحته

الحل : أ ب = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (٥ - ١)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$

ب جـ = $\sqrt{(-١ - ١)^٢ + (٣ - ٥)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

جـ د = $\sqrt{(٣ - (-١))^٢ + (-١ - ٣)^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$

أ د = $\sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (-١ - ١)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

أ جـ = $\sqrt{(-١ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$

ب د = $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-١ - ٥)^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (٦)^٢} = \sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$

∵ أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د ∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

📖 **مثال :- أثبت ان النقط أ = (٣ ، -١) ، ب = (-٤ ، ٦) ، جـ (٢ ، -٢) تقع على دائرة واحده مركزها م = (-١ ، ٢) و أوجد محيطها و مساحتها** .

الحل : أ م = $\sqrt{(-١-٣)^٢ + (٢-(-١))^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

ب م = $\sqrt{(-١-(-٤))^٢ + (٢-٦)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

جـ م = $\sqrt{(-١-٢)^٢ + (٢-(-٢))^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∵ أ م = ب م = جـ م　　∴ النقط أ ، ب ، جـ تقع دائره مركزها م و يكون طول نصف القطر = ٥ وحدة

محيط الدائره = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة مربعة و بنفس الطريقه نوجد المساحه

📖 **مثال** :- **اذا كان البعد بين النقطتين (م ، ٧) ، (-٢ ، ٣) يساوى ٥ فاوجد قيمة م** .

الحل : $\sqrt{(\text{م}+٢)^٢ + (٧-٣)^٢} = ٥$　بتربيع الطرفين

$(\text{م}+٢)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$　　$\text{م}^٢ + ٤\text{م} + ٤ + ١٦ - ٢٥ = ٠$

$\text{م}^٢ + ٤\text{م} - ٥ = ٠$　　$(\text{م} - ١)(\text{م} + ٥) = ٠$

م = ١　أو　م = -٥

ابتسم لحد متعرفهوش فى الشارع
هتخليه على الاقل ينسى مشاكله لمدة دقيقه و يفكر
مين الاهبل ده

تمارين على الدرس

١ - اكمل ما ياتى :

(١) البعد بين النقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ٤) = ... وحدة طول

(٢) نوع المثلث (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٥ ، ٥) بالنسبة لزواياه ....

(٣) بعد النقطة (٣ ، -٤) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول

(٤) طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) و تمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى ..... وحده

(٥) فى المربع أ ب جـ د اذا كان أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٢) فان مساحة المربع = ... وحدة مساحه

---

٢ - اختر الاجابه الصحيحه من بين الاجابات المعطاة : -

(١) فى مستوى احداثى متعامد النقطة التى تبعد عن نقطة الاصل مسافة ٢ وحدة طول يمكن ان تكون ......

((١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (-٣ ، ٥))

(٢) بعد النقطة (٣ ، - ٥) عن محور السينات = ... وحدة طول

(- ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

(٣) بعد النقطة (٢ ، - ٣) عن محور الصادات = ... وحدة طول

(٢ ، - ٣ ، √١٣ ، √٥)

(٤) دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ٢ وحدة طول ، فأى من النقط الاتيه تنتمى للدائره ؟

((١ ، ٢) ، (-٢ ، ١) ، (√٣ ، ١) ، (√٢ ، ١))

---

٣) أثبت ان النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، جـ (- ٥ ، - ٣) تقع على استقامه واحده

٤) اثبت أن الشكل الذي رؤوسه م(١ ، ٣) ، ب (١ ،٥) ، جـ(٣ ، ٥) ، د(٣ ، ٣) يمثل مربع وأوجد مساحته

٥) اذا كانت م = (س ، ٣) ، ب = (٣ ، ٢) ، جـ = (٥ ، ١) و كان م ب = ب جـ
فأوجد قيمة س .

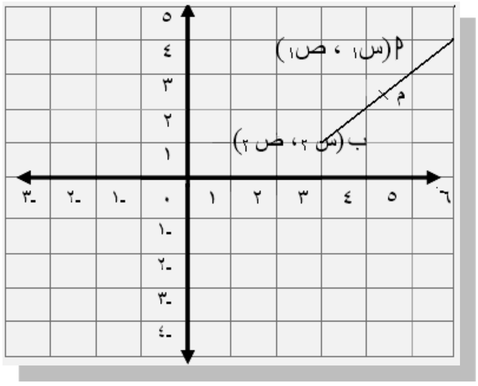
٦) أثبت أن النقط م(٣ ، ١٠) ، ب (٨ ، ٥) ، جـ (٥ ، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاويه
ثم أوجد مساحته .

٧) أثبت ان المثلث الذى رؤوسه النقط م = (٥ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) ، جـ = (-١ ، ٤)
متساوى الساقين و أوجد مساحته .

٨) مربع إحداثي رأسين متتاليين فيه (١ ، ٥)، (٤ ، ٣) احسب طول قطره .

٩) أوجد طول قطر الدائرة التي مركزها النقطة (٥ ، ٠) وتقطع محور السينات في النقطة (٣ ، ٠)

احداثيي منتصف قطعة مستقيمة



إذا كانت أ= (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب= (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)

نقطتين في المستوي الاحداثي وكانت النقطة (م)

تقسم القطعة المستقيمة أب فإن :

إحداثي النقطة (م)

$= \left(\frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢} \right)$

مثال ١ أوجد النقطة التي تقسم أب إذا كان أ= (٧ ،٥) ، ب (-١ ، ٩)

نفرض أن (د) هي نقطة المنتصف

وبالتالي يكون إحداثي (د)= $\left(\frac{٧ + -١}{٢} \text{ ، } \frac{٩ + ٥}{٢} \right) = (٣ \text{ ، } ٧)$

اثبت أن الشكل الذي رؤوسه أ(٤ ، -١) ، ب (-٤ ، ٣) ، جـ(-٦ ، -١) ، د(٦ ، ٣) يمثل متوازي أضلاع

إثبات أنه متوازي أضلاع نوجد منتصفا ت $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جد}}$

منتصف $\overline{\text{أب}}$ = $\left(\frac{٤ + -٤}{٢} \text{ ، } \frac{-١ + ٣}{٢} \right) = (٠ \text{ ، } ١)$

منتصف $\overline{\text{جد}}$ = $\left(\frac{-٦ + ٦}{٢} \text{ ، } \frac{٣ + -١}{٢} \right) = (٠ \text{ ، } ١)$

وبالتالي فتكون أقطار الشكل متناصفة فيكون متوازي أضلاع

أبجد متوازي أضلاع رؤوسه في ترتيب دوري واحد أ(٧ ، ٢) ، ب (١٥، ٤) ، جـ(٩ ، ٦)أوجد إحداثي النقطة (د)

من خواص متوازي الأضلاع أن أقطارة متناصفة

إحداثي منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = إحداثي منتصف $\overline{\text{ب د}}$ ولنفرض أن إحداثي د (ك ، ل)

$\left(\frac{٧ + ٩}{٢} \text{ ، } \frac{٢ + ٦}{٢} \right) = \left(\frac{١٥ + \text{ك}}{٢} \text{ ، } \frac{٤ + \text{ل}}{٢} \right)$

$(٨ \text{ ، } ٤) = \left(\frac{١٥ + \text{ك}}{٢} \text{ ، } \frac{٤ + \text{ل}}{٢} \right)$

١٥ + ك = ١٦ ك = ١ ، ٤ + ل = ٨ ل= ٤

ﻡب جـ د شبه منحرف ب جـ = ٢ ﻡ د ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ﻡ د}}$ ، ﻡ(٦ ، ٤)،ب(٤،-٢) ،جـ(-٢ ،-٤)

أوجد إحداثي النقطة د

نصل $\overline{\text{ﻡ هـ}}$ بحيث يكون هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ﻡ د = هـ جـ فيكون ﻡ د هـ جـ متوازي أضلاع

إحداثي هـ هو منتصف ب جـ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-٢ - ٤}{٢}\right)$ = (١ ، -٣)

نصل $\overline{\text{ﻡ هـ}}$ بحيث يكون هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ﻡ د = هـ جـ ، فيكون ﻡ د هـ جـ متوازي أضلاع

إحداثي هـ هو منتصف ب جـ = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-٢ - ٤}{٢}\right)$ = (١ ، -٣)

إحداثي منتصف ﻡ جـ = إحداثي منتصف هـ د

$\left(\frac{٦ - ٢}{٢} ، \frac{٤ - ٤}{٢}\right) = \left(\frac{١ + ك}{٢} ، \frac{-٣ + ل}{٢}\right)$

$\left(٢ ، ٠\right) = \left(\frac{١ + ك}{٢} ، \frac{-٣ + ل}{٢}\right)$

١ + ك = ٤ ك = ٣

-٣ + ل = ٠ ل = ٣ إحداثي النقطة (د) المطلوبة (٣ ، ٣)

تدريب :- اذا كانت ﻡ = (-١ ، ٠) ، ب = (٥ ، ٦) فأوجد احداثيى نقطة جـ التى تقع على $\overline{\text{ﻡ ب}}$ بحيث ﻡ ب = ٢ ﻡ جـ

ما اجمل العلاقات التى تشبه

توم و جيرى

مهما كان بينهم من شجارات

فانهم لا يستطيعوا الاستغناء

تمارين على الدرس

١ - اكمل ما ياتى :

(١) إحداثي منتصف القطعة الواصلة بين النقط (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) هي ....

(٢) اذا كانت جـ (٢ ، ١)هى منتصف أ ب حيث ب (٣ ، ٠) فان أ هى ....

(٣) إذا كانت النقطة (-١ ، ٧) علي بعدين متساويين من النقط (س،٣) ، (ص ، ٤)
فان س = ... ، ص= ....

(٤) اذا كان أ ب قطر فى الدائره بحيث أ = (٢ ، ٥) ، ب = (١٠ ، ٩) فان مركز الدائره = ...

---

٢) أثبت ان النقط : أ (٣ ، - ٢) ، ب (- ٥ ، ٠) ، جـ (٠ ، - ٧) ، د (٨ ، - ٩)
هى رؤوس متوازى أضلاع .

٣) إذا كانت النقط أ (-١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٧) ، جـ (٤ ، ٥) ، د(س – ١ ، ص – ٢)

رؤوس متوازي أضلاع أوجد س ، ص .

٤) اذا كان الشكل أ ب جـ د متوازى اضلاع حيث أ (٤ ، ٣) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (- ٢ ، - ٣)
أوجد احداثى النقطة د

٥) أ ب قطر فى دائره مركزها م فاذا كانت ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فأوجد
(أ) احداثى أ (ب) محيط الدائره حيث ط = ٣.١٤

٦) أثبت أن المثلث ٢ ب جـ حيث ٢ =(٥ ، -٥) ، ب = (-١ ، ٧) ، جـ = (١٥ ، ١٥) قائم الزاوية في
و أوجد إحداثي د التي تجعل الشكل ٢ب جـ د مستطيل

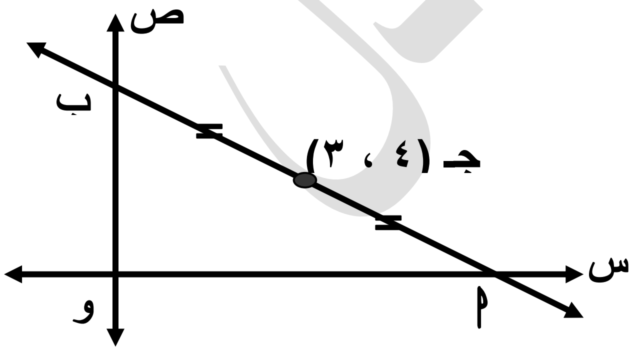
٧) إذا كان ٢ ب = ب جـ = جـ د حيث ٢(٠ ، ٥) ، جـ (-٢ ، ١) أوجد إحداثي ب وإحداثي د

(السؤال بصيغه اخرى اذا كانت ٢(٠ ، ٥) ، جـ (-٢ ، ١) اوجد النقط التى تقسم أ ، جـ

الى أربعة اجزاء متساويه)

٨) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط ٢=(-٣ ، ٠) ، ب = (٣ ، ٤) ، جـ = (١ ، -٦) مثلث متساوي
الساقين رأسه ٢ ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من ٢ عمودية علي ب جـ

٩) فى الشكل المقابل :
جـ (٤ ، ٣) أوجد احداثيات النقطتين ٢ ، ب
ثم أوجد طول و٢ ، وب



ميل الخط المستقيم

ايجاد ميل خط مستقيم يمر بنقطتين :

وليكن أحداثي أي نقطتين ؟ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$)

ميل المستقيم ؟ب $= \dfrac{\text{ص}٢ - \text{ص}١}{\text{س}٢ - \text{س}١} = \dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

مثلا اذا كان ؟ = (٥ ، ٦) ، ب = (٣ ، ٢) فان ميل أب $= \dfrac{\text{ص}٢ - \text{ص}١}{\text{س}٢ - \text{س}١} = \dfrac{٦ - ٢}{٥ - ٣} = \dfrac{٤}{٢} = ٢$

ايجاد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

اذا كان المستقيم يصنع زاويه هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فان **ميل المستقيم = ظا هـ**

مثلا : المستقيم الذى يصنع زاويه قياسها ٤٥° فان ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١

ايجاد الميل من معادلة الخط المستقيم :

اذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ؟س + ب ص + جـ = ٠ ، ب ≠ ٠

ميل المستقيم $= \dfrac{-\text{؟}}{\text{ب}} = \dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ميل المستقيم الذى معادلته ٢س + ٣ ص = ٥ هو $\dfrac{-٢}{٣}$

مثال : أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ = (-١ ، -٢) ، ب = (-٥ ، ١) .

$\text{م} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \dfrac{١ - (-٢)}{-٥ - (-٢)} = \dfrac{٣}{-٤} = \dfrac{-٣}{٤}$

مثال : إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٣ ، ك) يساوى ٢ فما قيمة ك .

الحل : ∵ م = ٢ ∴ $\dfrac{\text{ك} - ٢}{٣ + ١} = ٢$ ∴ $\dfrac{\text{ك} - ٢}{٤} = ٢$ ∴ ك – ٢ = ٨ ∴ ك = ١٠

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين :

اذا توازى مستقيمان تساوى ميلاهما و العكس صحيح

مثال : إثبت أن المستقيمان ٢س – ٣ ص +٥ = ٠ ، ٤ س – ٦ ص +١ = ٠ متوازيان

م$_1$ $= \dfrac{-٢}{-٣} = \dfrac{٢}{٣}$ ، م$_2$ $= \dfrac{-٤}{-٦} = \dfrac{٢}{٣}$

∵ م$_1$ = م$_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال : إثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (-٣ ، ١) يوازى المستقيم الذى معادلته ٤ س – ٥ ص +٧ = ٠

الحل : $م_١ = \frac{١ - ٥}{-٣ - ٢} = \frac{-٤}{-٥} = \frac{٤}{٥}$ ، $م_٢ = \frac{-٤}{-٥} = \frac{٤}{٥}$

∵ $م_١ = م_٢$　　　∴ المستقيمان متوازيان

مثال : إذا كان المستقيمان أ س – ٦ ص +٥ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٠ ،١) ، (٣ ، ٣) متوازيان أوجد قيمة أ .

الحل : ∵ **المستقيمان متوازيان**　　∴ الميلين متساويين

$م_١ = \frac{-أ}{-٦} = \frac{أ}{٦}$ ، $م_٢ = \frac{٣ - ١}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{أ}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ⟸ ٣أ = ١٢ ⟸ أ = ١٢

تدريب : إذا كان المستقيم الذي معادلته ص + (ك – ١) س = ٥ يوازي المستقيم الذي ميلة – ١ أوجد قيمة ك

<u>خلى بالك</u> : لاثبات ان الشكل متوازى اضلاع نثبت ان كل ضلعين متقابلين متوازين .

مثال : إثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط أ(١ ، ٢) ، ب(-٣، ٥) ، جـ(-٢، ٧) ، ء(٢ ،٤) متوازى أضلاع

الحل : ميل أ ب = $\frac{٥ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٣}{-٤} = \frac{-٣}{٤}$ ، ميل ب جـ = $\frac{٧ - ٥}{-٢ + ٣} = \frac{٢}{١} = ٢$

ميل جـ د = $\frac{٤ - ٧}{٢ + ٢} = \frac{-٣}{٤}$ ، ميل أ د = $\frac{٤ - ٢}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$

∵ **ميل أ ب = ميل جـ د**　　∴ $\overline{أ ب} // \overline{جـ د}$

∵ **ميل ب جـ = ميل أ د**　　∴ $\overline{ب جـ} // \overline{د أ}$

تدريب : إثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط أ(-١ ، ٠) ، ب(٧، ٤) ، جـ(٥، ٨) ، ء(١ ،٦) شبه منحرف

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = -١ اى أن $م_١ \times م_٢ = -١$ أ، $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$

مثلا اذا وجد مستقيمان متعامدان و كان ميل الاول = $\frac{٢}{٣}$ فان ميل المستقيم الثانى = $\frac{-٣}{٢}$

مثال : إثبت أن المستقيمان ٢س – ٣ ص +٥ = ٠ ، ٦ س + ٤ ص +١ = ٠ متعامدين

الحل : $م_١ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$ ، $م_٢ = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

∵ $م_١ \times م_٢ = -١$ ∴ المستقيمان متعامدان

مثال : إذا كان المستقيم الذى معادلته ٤س + ٦ص +١ = ٠ عمودى على المستقيم المار بالنقطتين

(-١ ، ٣) ، (١ ، ص) أوجد قيمة ص

الحل : $م_١ = \frac{-٤}{٦} = \frac{-٢}{٣}$ ، $م_٢ = \frac{ص - ٣}{١ + ١} = \frac{ص - ٣}{٢}$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\frac{ص - ٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

٢ (ص – ٣) = ٣ × ٢ ٣ص – ٦ = ٦ ٣ص = ١٢ ص = ١٢

ملاحظة هامه لاثبات الاشكال الهندسيه باستخدام الميل

١) متوازى اضلاع نثبت ان كل ضلعين متقابلين متوازيين .
٢) مستطيل نثبت ان الشكل متوازى اضلاع ثم نثبت ان احدى زواياه قائمة اى يوجد ضلعين متعامدين.
٣) معين نثبت ان الشكل متوازى اضلاع ثم نثبت ان القطران متعامدان .
٤) مربع نثبت ان الشكل متوازى اضلاع ثم نثبت ضلعين متعامدين و القطران متعامدان

مثال : إثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط أ=(١ ، ١) ، ب=(٠ ، ٤) ، جـ=(٣ ، ٥) ، ء = (٤ ، ٢) مربع

الحل : $م_{أب} = \frac{٤ - ١}{٠ - ١} = \frac{٣}{-١} = -٣$ $م_{ب جـ} = \frac{٥ - ٤}{٣ - ٠} = \frac{١}{٣}$

$م_{جـ د} = \frac{٢ - ٥}{٤ - ٣} = \frac{-٣}{١} = -٣$ ، $م_{أ د} = \frac{٢ - ١}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$

∵ $م_{أب} = م_{جـ د}$ ∴ $\overline{أب} // \overline{جـ د}$ ، ∵ $م_{ب جـ} = م_{أ د}$ ∴ $\overline{ب جـ} // \overline{أ د}$

∴ الشكل متوازى اضلاع

∵ $م_{أب} \times م_{ب جـ} = -١$ ∴ $\overline{أ ب} \perp \overline{ب جـ}$

$م_{أ جـ} = \frac{٥ - ١}{٣ - ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $م_{ب د} = \frac{٢ - ٤}{٤ - ٠} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

∵ $م_{أ جـ} \times م_{ب د} = -١$ ∴ $\overline{أ جـ} \perp \overline{ب د}$

∴ الشكل أ ب جـ د مربع

تمارين على الدرس

اكمل ما ياتى

(١) اذا كان أ ب // جـ د و كان ميل أ ب = $\frac{٢}{٣}$ فان ميل جـ د = ...

(٢) اذا كان أب ⊥ جـ د و كان ميل أ ب = $\frac{١}{٢}$ فان ميل جـ د = ...

(٣) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (-٢ ، ٣) يساوى .... و ميل العمودى عليه ...

(٤) أ ب جـ د متوازى اضلاع حيث أ (- ١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) فان ميل د جـ = ...

(٥) Δ أ ب جـ قائم الزاويه فى ب فيه أ = (١ ، ٥) ، ب = (٠ ، ١) فان ميل ب جـ = ...

(٦) أ ب جـ د مربع حيث أ (٣ ، ٥) ، جـ (٥ ، - ١) فان ميل ب د = ...

(٧) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ... ، ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات = ...

(٨) اذا كان المستقيم أ ب يوازى محور السينات حيث أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فان : ك = ...

(٩) اذا كان ميل الخط المستقيم أكبر من الصفر فان نوع الزاويه الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ....

(١٠) اذا كانت معادلة المستقيم ٢ س – ٣ ص = ٥ فان ميل المستقيم الموازى له .... و ميل المستقيم العمودى عليه .....

(١١) اذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = صفر متعامدين فان : ك = ...

اختر الاجابة الصحيحه من بين الاجابات المعطاه :

(١) اذا كان $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ميلى مستقيمين متعامدين فان ....

($م_{١} = م_{٢}$ ، $م_{١} = - م_{٢}$ ، $م_{١} م_{٢} = - ١$ ، $م_{١} م_{٢} = ١$)

(٢) اذا كان : $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ميلى مستقيمين متوازيين فان ....

($م_{١} - م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} + م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} - م_{٢} \neq ٠$)

(٣) اذا كان $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ميلى مستقيمين متعامدين ، $م_{١} = ٠.٧٥$ فان $م_{١}$ = ...

($-\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

(٤) اذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متعامدين فان : ك = ...

(-٣ ، ٢ ، -٢ ، ٣)

(٥) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (س ، ٥) ، (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) فان س = ...

(٢ ، -٢ ، صفر ، ١)

(٦) المستقيم المار بالنقطتين (- ١ ، -١) ، (٤ ، ٤) يصنع زاويه موجبه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ....

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ١٣٥°)

(٧) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (ك ، ٠) ، (٠ ، ٤) عموديا على المستقيم الذى يصنع زاويه موجبه قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فان ك = ...

(٤ ، -٤ ، ١ ، -١)

📖 اثبت ان الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٦) يكون عموديا على الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاويه موجبه قياسها ٤٥° .

📖 أثبت ان المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه
$\frac{١}{٤}$ الموجب لمحور السينات زاويه موجبه قياسها ٦٠° .

📖 اذا كان أ ب // محور السينات حيث أ (٥ ، - ٤) ، ب (- ٢ ، ص) أوجــد : ص .

📖 اذا كان المستقيم الذى معادلته أ س – ٢ ص + ٥ = ٠ يوازى المستقيم الذى يصنع زاويه موجبه قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أوجـد قيمة : أ

📖 اذا كان المستقيم ل$_{١}$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) و المستقيم ل$_{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاويه قياسها ١٣٥° فأوجد قيمة ك اذا كان المستقيمان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$

أ) متوازيين ب) متعامدين

📖 اذا كانت معادلتا المستقيمين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ هما على الترتيب : ٢س – ٣ص + أ = ٠ ، ٣س + ب ص – ٦ = ٠

فا وجد ١) قيمة ب التى تجعل ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ متوازيين .

٢) قيمة ب التى تجعل ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ متعامدين .

٣) قيمة أ اذا كانت النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم ل$_{١}$.

📖 اثبت ان النقط : أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، - ١) تقع على استقامه واحده .

📖 اذا كانت النقط : أ (٠ ، ١) ، ب (أ ، ٣) ، جـ (٢ ، ٥) تقع على استقامه واحده فاوجد قيمة أ .

📖 أثبت ان النقط أ (- ١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٢) ، د (٥ ، ٦) هى رؤوس متوازى اضلاع أ ب جـ د .

📖 اذا كانت أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) اثبت ان Δ أ ب جـ قائم الزاويه فى ب .

📖 اثبت باستخدام الميل ان النقط : أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) ، د (٠ ، ٦) هى رؤوس المستطيل أ ب جـ د .

📖 اذا كانت أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (ك ، - ٣) تمثل رؤوس مثلث قائم الزاويه فى ب أوجد قيمة ك .

📖 أ ب جـ د شبه منحرف فيه : أ ب // جـ د ، أ (٩ ، -٢) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (س ، - س) د (٤ ، - ٣) أوجد احداثيى نقطة جـ .

تمارين على الدرس

المستقيم الذى ميله م ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، جـ)[يقطع جـ من محور الصادات]

تتعين معادلته من العلاقة ص = م س + جـ

مثال : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٥ ويقطع ثلاث وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

الحل : م = ٥ ، جـ = ٣ ∴ معادلة المستقيم هى ص = ٥ س + ٣

مثال : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٢ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

الحل : م = ٢ ، جـ = ٣ ∴ معادلة المستقيم هى ص = ٢ س + ٣

مثال : أوجد ميل المستقيم ٢س +٣ ص = ١٢ ثم أوجد نقط تقاطعه مع محورى الاحداثيات

الحل : بقسمة معادلة المستقيم ÷ ٣ نجد ان

$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٣}{٣}$ ص = $\frac{١٢}{٣}$ ⟸ $\frac{٢}{٣}$ س + ص = ٤ ⟸ ص = ٤ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ الميل = $\frac{-٢}{٣}$ ، الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤ نقطة تقاطعه مع محور الصادات (٠ ، ٤)

مثال : اوجد الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١

الحل بضرب المعادله × ٦ ⟸ ٣ س + ٢ ص = ٦ ⟸ ٢ ص = ٦ − ٣س و بالقسمه ÷ ٢

ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س ⟸ ص = - $\frac{٣}{٢}$ س + ٣

∴ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣ ، ميل المستقيم = - $\frac{٣}{٢}$

مثال : أوجـــد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤ ، ٧)

∵ معادلة المستقيم ص = م س + جـ و ميله = $\frac{١}{٢}$ ⟸ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + جـ

نعوض بالنقطة (٤ ، ٧) فى المستقيم المطلوب

∴ ٧ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ + جـ ⟸ ∴ جـ = ٥ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥ ⟸ ٢ ص = س + ١٠

مثال : أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٥) و يوازى المستقيم س + ٢ ص – ٧ = صفر

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢}$ ∵ المستقيم المعطى // المستقيم الطلوب   ∴ الميلين متساوين

∴ ميـل المستقيم المطلـوب = $\frac{-١}{٢}$ و بالتعويض فى المعادله العامه للمستقيم ص = م س + جـ

ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ ⟸ و بالتعويض بالنقطة (٣ ، -٥) ⟸ ∴ - ٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + جـ

- ٥ = $\frac{-٣}{٢}$ + جـ ⟸ - ٥ + $\frac{٣}{٢}$ = جـ ⟸ ∴ جـ = $\frac{-٧}{٢}$

∴ معادلة المستقيم ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + $\frac{-٧}{٢}$ ⟸ ∴ ٣س + ٢ ص = - ٧

مثال : اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) و عمودى على المستقيم ٥ س – ٢ ص + ٧ = ٠

∵ معادلة المستقيم المعطى ٥س – ٢ ص + ٧ = ٠ ⟸ ∴ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٥}{٢}$

∵ المستقيم المطلوب ⊥ المستقيم المعطى ⟸ ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٥}$

بالتعويض فى المعادله العامه للمستقيم ص = م س + جـ

ص = $\frac{-٢}{٥}$ س + جـ   و بالتعويض بالنقطة (٣ ، ٤)

٤ = $\frac{-٢}{٥}$ × ٣ + جـ ⟸ ٤ = $\frac{-٦}{٥}$ + جـ ⟸ ∴ جـ = $\frac{٢٦}{٥}$

∴ معادلة المستقيم هى ص = $\frac{-٦}{٥}$ س + $\frac{٢٦}{٥}$ ⟸ ∴ ٦ س + ٥ ص = ٢٦

تدريب : اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، - ٢) عموديا على المستقيم اللذى يصنع زاويه قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

مثال : اوجد معادلة محور تماثل القطعة س ص حيث س (٣ ، - ٢) ، ص (- ٥ ، ٦)

ميل المستقيم س ص = $\frac{٦ - (-٢)}{-٥ - ٣}$ = $\frac{٨}{-٨}$ = -١

محور تماثل القطعه ⊥ القطعه نفسها   ∴ ميل محور التماثل = ١

∵ محور التماثل لقطعه يمر بمنتصفها   منتصف س ص = $(\frac{٣ + (-٥)}{٢} ، \frac{-٢ + ٦}{٢}) = (\frac{-٢}{٢} ، \frac{٤}{٢})$

∴ منتصف س ص = (-١ ، ٢)   ∴ محور التماثل يمر بالنقطة (-١ ، ٢)

بالتعويض فى المعادله العامه للمستقيم حيث م = -١   ∴ ص = - س + جـ

بالتعويض بالنقطة (-١ ، ٢) فى المستقيم   ٢ = - (-١) + جـ   ٢ = ١ + جـ   جـ = ١

∴ معادلة محور التماثل هى ص = - س + ١

تدريب : ١) أ ب جـ د مربع فيه أ = (٥ ، ٤) ، جـ (-١ ، ٦) فاوجد معادلة ب د .

٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٦) و منتصف أ ب حيث أ (١ ، - ٢) ب (٣ ، - ٤)

مثال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٤ ، ٣)

الحل : اولا نوجد ميل المستقيم ∴ م = $\frac{٣ - ٢}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$

معادله الخط المستقيم ص = $\frac{١}{٧}$ س + جـ ثم نعوض باى من النقطتين لايجاد الجزء المقطوع من محور الصادات .

نعوض بالنقطة (١ ، ٢) فى معادلة الخط المستقيم

∴ ٢ = $\frac{١}{٧}$ × ١ + جـ ∴ ٢ = $\frac{١}{٧}$ + جـ ∴ ٢ - $\frac{١}{٧}$ = جـ ∴ جـ = $\frac{٥}{٣}$

∴ ص = $\frac{١}{٧}$ س + $\frac{٥}{٣}$ ∴ ٣ ص = س + ٥

حل أخر يمكن استخدام العلاقة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

تمارين على الدرس

١ – اختر الاجابة الصحيحه من بين الاجابات المعطاه :

١) المستقيم الذى معادلته : ٣ س + ٤ ص – ٥ = ٠ يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءا طوله .... وحدة طول

(٥ ، - ٥ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-٤}{٣}$)

٢) معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل و ميله = ٣ هى ....

(ص = ٢ س ، س = ٣ ، ص = ٣ ، ص = $\frac{١}{٣}$)

٣) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، - ٣) موازيا محور السينات هى .....

(س = - ٢ ، ص = - ٣ ، س = ٢ ، ص = ٣)

٤) البعد العمودى بين المستقيمين : ص – ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوى .... وحدة الطول

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٥)

٥) مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات : ٣ س – ٤ ص = ١٢ س = ٠ ، ص = ٠ تساوى ....

(٦ ، - ٦ ، ١٢ ، - ١٢)

اوجد معادلة المستقيم

١) الذى ميله = ٣ و يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات طولية ثم اوجد نقطة تقاطعه مع محور السينات

٢) الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاويه موجبه قياسها ١٣٥° و يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزء مقداره ٧ وحدات طول .

٣) الذى يقطع من محور الصادات جزء موجبا طوله ٥ وحدات طولية و يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، ٣) ، (-١ ، -٦)

٤) المار بالنقطة (١ ، ٢) موازيا المستقيم : ٢ س + ٣ ص – ٦ = ٠

٥) المار بالنقطه (٢ ، ٣) عموديا على المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، - ٤) ، ب (٥ ، - ٣)

٦) المار بالمقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (- ١ ، ٦)

٧) معادلة محور تماثل أ ب حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)

٨) الذى يقطع جزئين موجبين من محورى الاحداثيات السينى و الصادى طولاهما ٣ ، ٦ وحده طوليه على الترتيب ، ثم اوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم و محورى الاحداثيات

٩) أ ب قطر فى الدائره التى مركزها م فاذا كانت : ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فأوجد :
أ) احداثيى نقطة أ ب) معادلة المستقيم العمودى على أ ب من نقطة ب .

١٠) أ (٥ ، - ٦) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (١ ، - ٣) ، فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ و بنقطة منتصف ب جـ

١١) أ ب جـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، - ٢) ، جـ (٣ ، ٤) ، د منتصف أ ب
رسم د هـ // ب جـ و يقطع أ جـ فى هـ ، أوجـد :
أ) طول د هـ   ب) معادلة المستقيم د هـ

مع اطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح الباهر

ذ / أحمد عــادل

٠١١٠٠٧١٨٣٥١

www.modars1.com